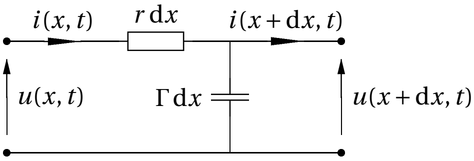
Complément TP de physique n° 10 — Étude théorique d'une ligne *RC*

L'étude expérimentale de la ligne RC a montré des résultats rappelant l'effet de peau, caractéristique de l'équation de la diffusion en régime harmonique.
On se propose deux modélisations de la ligne RC pour justifier ce comportement.

1 — Modèle de la ligne à constantes réparties

Ce modèle, *a priori* assez éloigné de la ligne réelle, permet de faire apparaître les phénomènes en jeu avec des équations simples.
On considère une ligne électrique de longueur L possédant une résistance linéique r et une capacité linéique Γ ; on parle alors de « ligne à constantes réparties ».
Une longueur $\mathrm{d}x$ de cette ligne a donc pour modèle électrique équivalent :



1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension $u(x,t)$ le long de la ligne.
Comment s'appelle cette équation ?

2. Dans le cas d'une ligne semi-infinie ($x > 0$), on cherche une solution en régime harmonique sous la forme complexe

$$\underline{u}(x,t) = \underline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

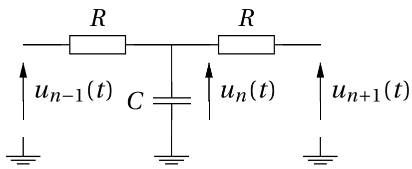
Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{F}(x)$.
La résoudre dans le cas de la ligne semi-infinie, avec la condition à l'origine $u(0,t) = U_0 \cos\omega t$.

3. En notant $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = U(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \varphi(x))}$, montrer que $U(x) = U_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}$ et préciser l'expression de δ en fonction de la fréquence f et des paramètres de la ligne.
Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des paramètres de la ligne.
Donner l'expression de la tension réelle $u(x,t)$.

4. Faire apparaître une distance caractéristique δ décrivant la décroissance de $U(x)$ avec x.
Comment varie δ avec la fréquence f ? Est-ce compatible avec les résultats expérimentaux ?
Que peut-on dire de δ quand la fréquence devient élevée ? Comment s'appelle ce phénomène ?

2 — Modèle de la ligne à constantes localisées

Il s'agit de la ligne réelle, constituée de la succession des cellules RC. On s'intéresse à la tension $u_n(t)$:



2.1 Mise en équation

5. Établir la relation entre $\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$ et les tensions $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

2.2 Passage à la limite de la ligne continue

On interpole les tensions discrètes $u_n(t)$ par une fonction continue $u(x,t)$ telle que

$$u_n(t) = u(x_n = na, t)\,.$$

La ligne discrète est ainsi vue comme une ligne continue où les tensions sont mesurées aux points $x_n = na$ équidistants de a. Cette approximation est d'autant plus justifiée que a est « petit », ce que l'on précisera par la suite.

6. En effectuant un développement au second ordre en a de $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$, et en assimilant $\dfrac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}$ à $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ montrer que l'équation de récurrence établie à la question 5 se ramène à l'équation aux dérivées partielles de la question 1, en prenant $r = \dfrac{R}{a}$ et $\Gamma = \dfrac{C}{a}$.

7. En utilisant l'expression de $u(x,t)$ établi à la question 1, et en considérant $u_n(t) = u(na,t)$, montrer que l'on peut écrire

$$u_n(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0}\cos\left(2\pi f t - \frac{n}{n_0}\right),$$

où l'on exprimera n_0 en fonction de f et des paramètres r, Γ et a de ligne continue, puis en fonction de f et des paramètres R et C de la lignes discrète.

2.3 Validité du passage à la ligne continue

8. Comment interpréter, en terme d'onde, le terme $\cos\left(2\pi f t - \dfrac{x}{\delta}\right)$ de l'expression de $u(x,t)$?

Exprimer la longueur d'onde λ associée.

Le passage au milieu continu est valide si la variation spatiale de l'onde de tension, à un instant t donné, est faible à l'échelle d'une cellule, c'est-à-dire si $a \ll \lambda$.

Montrer que cette condition se ramène à $RCf \ll \beta$, où β est un coefficient numérique que l'on précisera.

9. Discuter de la validité du modèle de la ligne continue étudiée en TP aux fréquences considérées.

2.4 Validité du modèle de la ligne semi-infinie

On a considéré la ligne comme semi-infinie ($N \to \infty$), ce qui revient à négliger tout effet de bord en bout de ligne.

10. Comment serait modifiée l'expression de $u(x,t)$ établie à la question 11 si la ligne est de longueur finie ? On donnera la forme générale de son expression sans chercher à déterminer d'éventuelles constantes dépendant des conditions aux extrémités.

11. En admettant que l'effet de l'extrémité de la ligne est négligeable si $U_N < \dfrac{U_0}{100}$, montrer que le nombre de cellules doit être au moins égal à un nombre $N_{\min}$ que l'on exprimera en fonction de n_0.

12. Discuter de la validité du modèle de la ligne semi-infinie lors des mesures expérimentales effectuées.

2.5 Étude directe de ligne à constantes réparties (d'après un écrit de Centrale PC)

On part de l'équation de récurrence établie à la question 5.

13. En régime harmonique, on note $\underline{u}_n(t) = \underline{U}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = U_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_n)}$ la tension au point n.

Montrer que cette équation admet une solution de la forme $\underline{U}_n = \underline{k}^n\underline{U}_0$, pourvu que le nombre complexe $\underline{k}$ vérifie une équation du second degré à expliciter.

14. On se place dans la limite des basses fréquences, soit $X = RC\omega \ll 1$. Montrer alors que, au deuxième ordre près en $\sqrt{X}$, le paramètre $\underline{k}$ est donné par

$$\underline{k} = 1 \pm (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{X}{2}}.$$

15. Montrer que, au premier ordre en $\sqrt{X}$, le module de $\underline{k}$ est donné par $\left|\underline{k}\right| = 1 \pm \sqrt{\dfrac{X}{2}}$.

En envisageant la limite $n \to +\infty$ d'une ligne très longue, lever l'indétermination sur le signe apparaissant dans l'expression de $\left|\underline{k}\right|$.

En déduire l'expression, entièrement déterminée, de $\underline{k}$.

16. Comme $X = RC\omega \ll 1$, $\left|\underline{k}\right|$ est proche de l'unité. Montrer que l'amplitude U_n de $u_n(t)$ présente alors une décroissance quasi exponentielle du type

$$\frac{U_n}{U_0} \approx \mathrm{e}^{-\frac{n}{n_0}}.$$

Exprimer n_0.

17. Comparer l'hypothèse $X \ll 1$ effectuée ici avec l'hypothèse nécessaire pour utiliser le modèle de la ligne continue étudiée dans la sous-partie **2.3**.