

Partie I — Autour du sirop d'érable

Le sirop d'érable, produit emblématique du Québec (province du Canada), est un concentré de sève d'érable recueillie en faisant des trous dans l'écorce de l'arbre au printemps.

1 — Déversoir de pâte

Le but d'un déversoir de pâte est de faire couler dans une poêle un volume de pâte à pancakes constant de manière automatisée. Trois options sont possibles pour sa réalisation : par électroaimant, par motorisation, par motorisation avec réservoir. La dernière solution sera retenue ; elle permet d'ailleurs de prévoir un déversoir de sirop d'érable fonctionnant sur le même actionneur (voir figure 1). On cherche à déterminer le temps de coulée de la pâte en fonction des différents paramètres du réservoir et du fluide afin de connaître la durée pendant laquelle l'actionneur doit laisser s'écouler la pâte.

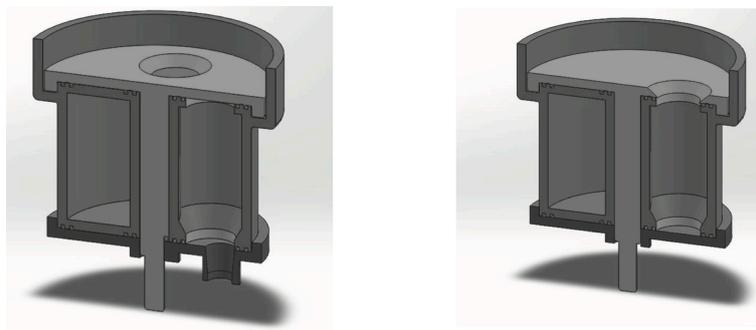


FIGURE 1 – Déversoir par motorisation avec réservoir : principe de fonctionnement

1 Modèle parfait

On modélise le réservoir par un cylindre de rayon R_1 , rempli de pâte sur une hauteur h_0 à l'instant initial, baignant dans l'air atmosphérique à la pression P_0 . En ouvrant le réservoir en son fond à l'instant $t = 0$, la pâte s'écoule à l'air libre à travers une section cylindrique de rayon R_2 ; $h_p(t)$ désigne la hauteur de pâte encore présente dans le réservoir à l'instant t . On note ρ la masse volumique de la pâte et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

Dans une première approche, on néglige toute dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte. On propose alors d'utiliser la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 de la ligne de courant représentée sur la figure 2.

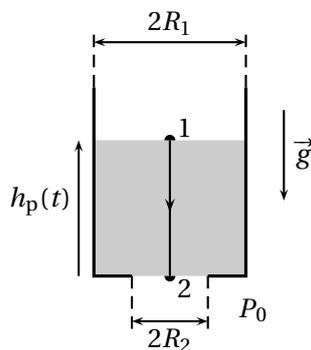


FIGURE 2 – Vidange du réservoir : notations utilisées

1. Rappeler la relation de Bernoulli, ainsi que ses conditions d'application. On supposera ces conditions remplies dans le cadre de ce premier modèle.
2. L'écoulement étant supposé incompressible, trouver une relation liant les vitesses $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de la pâte à l'instant t au niveau des sections de rayons respectifs R_1 et R_2 .
3. Déterminer une expression de $v_2(t)$ en fonction de g , $h_p(t)$, R_1 et R_2 uniquement.

4. En identifiant $v_1(t)$ à $-\frac{dh_p}{dt}$, déduire de la question précédente une équation différentielle régissant l'évolution de $h_p(t)$.
5. Résoudre cette équation différentielle par séparation des variables, puis montrer que la durée totale de vidange du réservoir s'exprime par

$$\tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1 \right]}.$$

6. Calculer numériquement τ_p . On trouve un temps de vidange expérimental $\tau_{\text{exp}} = 1,5$ s. Qu'en pensez-vous?

2 Le modèle visqueux

On propose un deuxième modèle tenant compte des effets visqueux. On note η la viscosité dynamique de la pâte. Pour simplifier la modélisation, on assimile le réservoir à un cylindre de rayon R_1 , ce qui revient à négliger l'effet du rétrécissement de section de R_1 à R_2 . La dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte s'accompagne d'un terme de perte de charge régulière le long de la hauteur de pâte $h_v(t)$ à l'instant t , homogène à une pression et donné par la loi de Darcy-Weisbach :

$$\Delta P_c = \Lambda \frac{\rho v_m^2}{2} \frac{h_v(t)}{d} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Dans cette expression, $v_m = -\frac{dh_v}{dt}$ représente la vitesse débitante (ou vitesse moyenne) de l'écoulement dans le réservoir, $d = 2R_1$ le diamètre du réservoir et Re le nombre de Reynolds.

On a $h_v(t=0) = h_0$.

7. Évaluer l'ordre de grandeur de v_m en utilisant le temps τ_{exp} donné à la question 6. Rappeler la définition du nombre de Reynolds en fonction de ρ , v_m , η et d , puis estimer sa valeur pour l'écoulement étudié. L'expression de Λ proposée étant valable dans la limite $\text{Re} < 2 \times 10^3$, vérifier la validité de cette formule.
8. Appliquer la relation de Bernoulli généralisée en tenant compte de cette perte de charge entre les points 1 et 2 (voir figure 2) et obtenir une expression de $\frac{dh_v}{dt}$ en fonction de ρ , g , R_1 et η . On rappelle que l'on néglige l'effet du rétrécissement.
9. Déterminer la loi d'évolution $h_v(t)$. En déduire la durée totale de vidange du réservoir τ_v .
10. Calculer numériquement τ_v et comparer à la valeur expérimentale de la question 6. Comment pourrait-on encore affiner la modélisation?

Donnée

accélération de la pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
dimensions du réservoir :	$R_1 = 1,0 \text{ cm}; R_2 = 0,70 \text{ cm}$
hauteur initiale de pâte :	$h_0 = 6,0 \text{ cm}$
masse volumique de la pâte :	$\rho = 1,1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
viscosité dynamique de la pâte :	$\eta = 3,0 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

2 — Manchon de sirop d'érable

Quand on prend du sirop d'érable pour l'étaler sur un pancake, il vaut mieux tourner la cuillère ou le couteau pour en prendre le plus possible et éviter d'en faire tomber. Afin de modéliser la situation, on considère un cylindre de rayon a et de longueur L tournant autour d'un axe horizontal à la vitesse angulaire Ω et entouré d'une couche d'épaisseur $h(\theta, r)$ de sirop d'érable, assimilable à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , plongé dans le champ de pesanteur \vec{g} (voir figure3). On définit l'épaisseur moyenne du film liquide par :

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta. \quad (1)$$

On cherche à étudier le régime stationnaire où l'épaisseur h du film de sirop ne dépend plus que de l'angle θ . On suppose l'épaisseur du film h faible devant le rayon a du cylindre et les déformations du film faibles devant h (dans un souci de lisibilité de la figure, les proportions ne sont pas respectées). Les effets de viscosité de l'air ambiant sont négligés et la pression est supposée uniforme au sein du film. L'étude étant menée en coordonnées

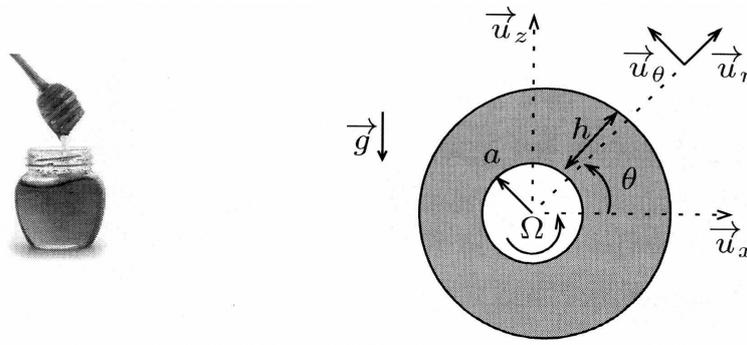


FIGURE 3 – Cylindre en rotation enduit de sirop d'érable (vue de côté) : notation utilisées

cylindriques, on propose d'écrire le champ des vitesses dans le film sous la forme $\vec{v} = v(r, \theta, t) \vec{u}_\theta$. On admet que l'application de la 2^e loi de Newton à une particule de fluide au sein du film conduit à l'équation :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho g \cos \theta + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \quad (2)$$

1. En raisonnant sur les ordres de grandeur, déterminer une condition sur Ω vis-à-vis d'une quantité dépendant de η , ρ et de h_0 , permettant de négliger $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$ devant $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. Cette condition est-elle vérifiée ici ?

Sous cette condition, deux intégrations successives de cette relation permettent d'aboutir au champ des vitesses suivant :

$$v(r, \theta) = a\Omega + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [(r - a)^2 - 2(r - a)h]. \quad (3)$$

2. Vérifier que $v(r, \theta)$ satisfait à la condition aux limites imposée en $r = a$. Reproduire le schéma de la figure 3 en y traçant le champ des vitesses en $\theta = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

3. Justifier que le débit volumique par unité de longueur de cylindre s'écrit

$$Q(\theta) = \int_a^{a+h} v(r, \theta) dr, \quad (4)$$

puis calculer cette intégrale en fonction de $h, \theta, g, \eta, \rho, a$ et Ω .

4. En régime stationnaire, on admet que le débit ne dépend plus de θ : $Q(\theta) = Q$. En déduire un lien entre l'épaisseur h et l'angle θ sous la forme $F(h) = 0$, avec

$$F(h) = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \cos \theta - \Omega a h + Q. \quad (5)$$

La figure 4 illustre les allures de la fonction $F(h)$ selon le signe de $\cos \theta$. Pour $\cos \theta > 0$, deux comportements sont possibles selon que F s'annule ou pas dans le domaine $h > 0$.

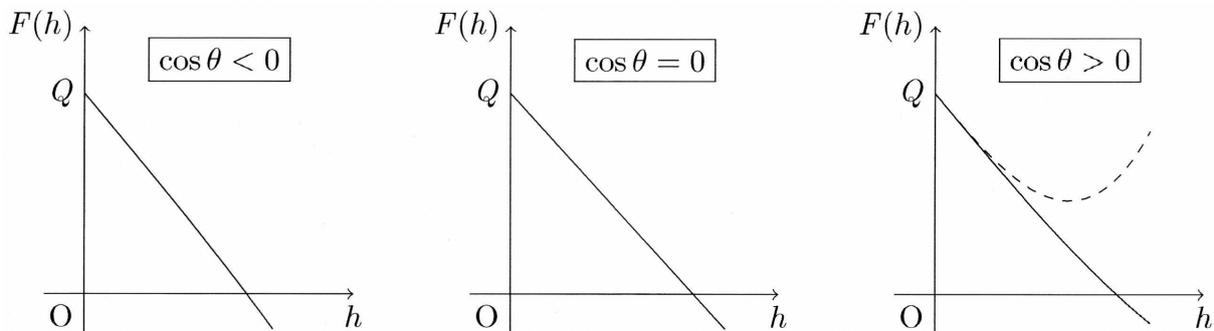


FIGURE 4 – Représentations graphique de $F(h)$

5. En étudiant les variations de la fonction F pour un angle θ fixé, montrer qu'une solution à l'équation $F(h) = 0$ existe à condition d'avoir $Q < Q_{\max}(\theta)$, où $Q_{\max}(\theta)$ est une quantité à exprimer en fonction de θ, g, η, ρ, a et Ω . Pour quelle condition sur Q existe-t-il alors une solution pour tout angle θ ?

6. En déduire littéralement la masse maximale de sirop d'érable que l'on peut ainsi maintenir autour du cylindre, par unité de longueur, en fonction de g , η , ρ , a et Ω .

Données

Propriétés physiques du sirop d'érable :

— masse volumique $\rho = 1,4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;

— viscosité dynamique $\eta = 0,20 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Épaisseur moyenne du film liquide : $h_0 = 0,50 \text{ mm}$.

Vitesse angulaire de rotation : $\Omega = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Partie II — Oscillateur à relaxation

Cette partie traite d'un modèle d'oscillateur hydraulique.

On notera ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, et on prendra pour valeurs numériques $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

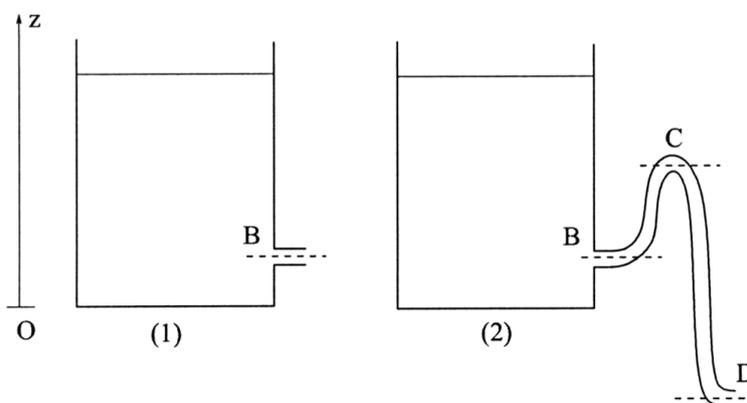


FIGURE 1 – Le récipient et son siphon

1 Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire S . Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical (Oz) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir (voir figure 1 à gauche). Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur h et percé d'un orifice situé au niveau du point B , à hauteur z_B . Cet orifice possède une section droite σ . On nomme D_s le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir (d'aire S) et l'extrémité de l'orifice B sont en contact avec l'air entourant le réservoir, à pression atmosphérique $P_0 = 1 \text{ bar}$. Tous les écoulements considérés dans cette partie seront assimilés à des écoulements non visqueux, incompressibles et laminaires. La variable de temps est notée t .

1. On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur $h(t)$ de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement. Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à cet écoulement.

2. Énoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de ces lignes de courant, et déterminer, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, et pour des sections droites S et σ quelconques, la vitesse du fluide v_B au niveau de l'orifice B .

Que vaut alors le débit D_s ?

3. En déduire la valeur algébrique de $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$.

Que deviennent les expressions de v_B et \dot{h} dans la limite où la section droite σ est très petite devant S ?

Dans toute la suite, on considère valide l'approximation $\sigma \ll S$.

4. Calculer la valeur numérique de débit D_s lorsque $h = 2 \text{ m}$, $z_B = 0,1 \text{ m}$ et $\sigma = 2 \text{ cm}^2$.

Exprimer votre résultat dans les unités du système international (SI), puis en litre par seconde ($\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$).

2 Influence du siphon

Un siphon est une portion coudée de conduite, de section constante σ , dont la hauteur maximale, représentée par le point C de la figure 1, page 4 à droite, se trouve à une hauteur z_C supérieure à la hauteur z_B de l'orifice de la conduite. Un siphon peut se trouver dans deux états :

- dans l'état amorcé, le siphon ne contient pas d'air, et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'une extrémité à l'autre du siphon. L'extrémité D située à l'opposé du réservoir se retrouve alors en contact avec l'air à la pression atmosphérique P_0 ;
- dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que de l'air pénètre par l'orifice situé en B . Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau d'eau excède z_C .

5. Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit sortant D_s , que l'on exprimera en fonction de h , g , σ et de la hauteur de l'un des trois points B , C ou D .
6. Donner une équation différentielle du premier ordre en t pour l'évolution temporelle de la hauteur h de la surface libre, dans le régime où le siphon est amorcé. Le réservoir n'est alimenté par aucune source.
7. Trouver la solution de cette équation différentielle, en partant d'une condition initiale $h(0) = h_0 \geq z_C$. En déduire la durée nécessaire t_1 pour que le siphon se désamorce.¹

3 Réservoir alimenté

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit D_i , arrivant par l'orifice A , et qui ne perturbe par l'écoulement de vidange (figure 2).

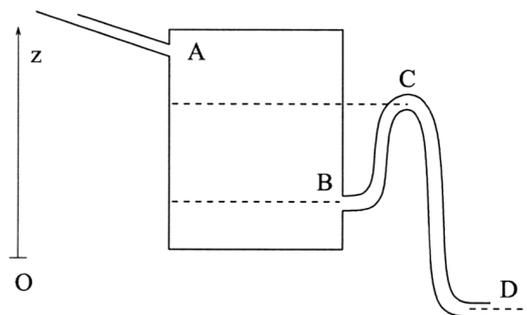


FIGURE 2 – Réservoir alimenté

8. Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur h en présence d'un débit D_i venant alimenter le réservoir, le siphon étant amorcé?
9. Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire, de hauteur h_s constante, que l'on exprimera en fonction de z_D , D_i , σ et g . Cette solution paraît-elle acceptable si la valeur de h_s associée à un débit D_i est telle que $h_s < z_B$? Justifier votre réponse.
10. Décrire l'évolution de la hauteur $h(t)$ lorsque le siphon est désamorcé.
11. Montrer que si le débit D_i est plus faible qu'une valeur critique D_c , le système représenté sur la figure 2 se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction périodique du temps. Déterminer la valeur de D_c .
12. On suppose $D_i < D_c$. Représenter schématiquement l'allure temporelle de la hauteur $h(t)$ en fonction du temps t . Déterminer, en fonction des paramètres du problème, la période T du phénomène, en négligeant, lorsque le siphon est amorcé, le débit incident D_i par rapport au débit sortant D_s .
13. *Application numérique.*

Calculer D_c et T pour les valeurs suivantes des paramètres, dans le cadre de l'approximation de la question précédente : $z_D = -0,2$ m, $z_C = 0,3$ m, $z_B = 0,1$ m, $\sigma = 2$ cm², $D_i = 4 \times 10^{-4}$ m³ · s⁻¹ et $S = 1$ m².

1. On peut aussi trouver directement t_1 sans résoudre l'équation différentielle, ce que vous pouvez faire si vous n'arrivez pas à la résoudre.