# DM n° 5 — Bilans — correction

## Partie I — Autour du sirop d'érable

## 1 — Déversoir de pâte

### 1 Modèle parfait

**1.** Relation de Bernoulli :

$$\boxed{P+\rho g z+\frac{1}{2}\rho v^2=\mathrm{K}},$$

constante le long d'une ligne de courant.
Hypothèses sur l'écoulement et le fluide :
— stationnaire ;
— parfait ;
— homogène ;
— incompressible.

**2.** La conservation du débit volumique s'écrit

$$v_1(t)\pi R_1^2=v_2(t)\pi R_2^2,$$

d'où

$$\boxed{v_1(t)=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v_2(t)}.$$

**3.** On applique la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$P_1+\rho g z_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_2+\rho g z_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

On a $P_1=P_2=P_0$, $z_1(t)-z_2(t)=h_\mathrm{p}(t)$, d'où

$$g h_\mathrm{p}(t)+\frac{v_1^2(t)}{2}=\frac{v_2^2(t)}{2},$$

soit

$$v_2^2(t)=v_2^2(t)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4+2g h_\mathrm{p}(t),$$

d'où

$$\boxed{v_2(t)=\sqrt{\frac{2g h_\mathrm{p}(t)}{1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}}}.$$

**4.** On a

$$v_2(t)=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 v_1(t)=-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\frac{\mathrm{d}h_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}h_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sqrt{\frac{2g h_\mathrm{p}(t)}{1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}}=\frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\sqrt{\frac{2g h_\mathrm{p}(t)}{1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4}},$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2g h_\mathrm{p}(t)}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4-1}}}.$$

**5.** Séparation des variables et intégration :

$$\int_0^{\tau_\mathrm{p}}\mathrm{d}t=-\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4-1}\,\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{h_0}^0\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}$$

soit

$$\tau_\mathrm{p}=\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4-1}\,\frac{1}{\sqrt{2g}}2\sqrt{h_0}.$$

On obtient bient

$$\boxed{\tau_\mathrm{p}=\sqrt{\frac{2h_0}{g}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4-1\right]}}.$$

**6.** On calcule $\boxed{\tau_\mathrm{p}=0{,}20\ \mathrm{s}}$.
Cette valeur est nettement inférieure au temps mesuré expérimentalement : on ne peut pas considérer l'écoulement comme parfait, il faut prendre en compte la viscosité du fluide.

### 2 Le modèle visqueux

**7.** En considérant la vitesse moyenne constante, on a en ordre de grandeur

$$\boxed{v_\mathrm{m}=\frac{h_0}{\tau_\mathrm{exp}}}$$

soit $\boxed{v_\mathrm{m}=4{,}0\times10^{-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.
Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans une conduite est défini par

$$\boxed{\mathcal{R}\mathrm{e}=\frac{\rho v_\mathrm{m} d}{\eta}}.$$

On calcule $\boxed{\mathcal{R}\mathrm{e}=0{,}3}$.
On a bien $\mathcal{R}\mathrm{e}<2\times10^3$, la formule de Darcy-Weisbach est bien valide.

**8.** Relation de Bernoulli généralisée ente les points 1 et 2 :

$$\left(P_1+\rho g z_1+\rho\frac{v_1^2}{2}\right)=\left(P_2+\rho g z_2+\rho\frac{v_2^2}{2}\right)+\Delta P_\mathrm{c}.$$

On a $P_1=P_2=P_0$ et $z_1-z_2=h_\mathrm{v}(t)$.
En négligeant le rétrécissement de section, on a $v_1(t)=v_2(t)$, d'où

$$\rho g h_\mathrm{v}(t)=\Delta P_\mathrm{c}=\Lambda\frac{\rho v_\mathrm{m}^2}{2}\frac{h_\mathrm{v}(t)}{d}=\frac{64\eta}{\rho d v_\mathrm{m}}\frac{\rho v_\mathrm{m}^2}{2}\frac{h_\mathrm{v}(t)}{d}$$

d'où comme $d = 2R_1$

$$\rho g = \frac{32\eta v_\mathrm{m}}{d^2} = \frac{8\eta v_\mathrm{m}}{R_1^2}.$$

Avec $v_\mathrm{m} = -\mathrm{d}h_\mathrm{v}/\mathrm{d}t$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h_\mathrm{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\rho g R_1^2}{8\eta}}.$$

**9.** Avec $h_\mathrm{v}(t=0) = h_0$, on obtient la loi

$$\boxed{h_\mathrm{v}(t) = h_0 - \frac{\rho g R_1^2}{8\eta}t}.$$

La durée totale de vidange est donnée pr $h(\tau_\mathrm{v}) = 0$, soit

$$\boxed{\tau_\mathrm{v} = \frac{8\eta h_0}{\rho g R_1^2}}.$$

**10.** On calcule $\boxed{\tau_\mathrm{v} = 1{,}3\ \mathrm{s}}$ , valeur tout à fait comparable à la valeur expérimentale.
Il reste cependant un écart de l'ordre de 10 %. On pourrait affiner la modélisation en prenant en compte le rétrécissement de la section, ce qui provoque une perte de charge supplémentaire (perte de charge singulière).

## 2 — Manchon de sirop d'érable

**1.** En notant $T$ le temps caractéristique du phénomène, on a en ordre de grandeur

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx \frac{v}{T}.$$

On a ici une rotation, donc le temps caractéristique est la période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$, d'où

$$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Omega\rho}{2\pi}v.$$

La distance caractéristique de l'écoulement selon le rayon est $h_0$, donc en ordre de grandeur on a

$$\eta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \approx \eta\frac{v}{h_0^2}.$$

On veut

$$\frac{\Omega\rho}{2\pi}v \ll \eta\frac{v}{h_0^2},$$

ce qui est réalisé pour

$$\boxed{\Omega \ll \frac{2\pi\eta}{\rho h_0^2}}.$$

On a $\dfrac{2\pi\eta}{\rho h_0^2} = 3{,}6\times 10^3\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ ; avec $\Omega = 12{,}6\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ cette condition est largement respectée.

**2.** On calcule $v(a,\theta) = a\Omega$, qui est la vitesse d'un point du cylindre en rotation en contact avec le fluide. La condition de continuité de la vitesse est bien satisfaite.
Pour $\theta = 0$ on a

$$v(r,0) = a\Omega + \frac{\rho g}{2\eta}\left[(r-a)^2 - 2(r-a)h\right].$$

Pour $\theta = \pi/2$ on a

$$v(r,\pi/2) = a\Omega.$$

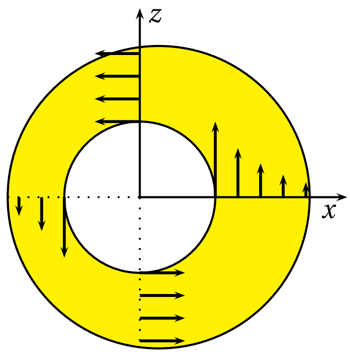
Pour $\theta = \pi$ on a

$$v(r,\pi) = a\Omega - \frac{\rho g}{2\eta}\left[(r-a)^2 - 2(r-a)h\right].$$

Pour $\theta = 3\pi/2$, on a

$$v(r,3\pi/2) = a\Omega.$$

Représentons le profil de vitesse :




**3.** Le débit volumique à travers un tranche de largeur $\mathrm{d}r$ et de hauteur $L$ dans la direction $\theta$ est

$$\mathrm{d}D_\mathrm{v}(\theta) = v(r,\theta)L\,\mathrm{d}r.$$

Le débit total vaut donc

$$D.\mathrm{v}(\theta) = L\int_a^{a+h} v(r,\theta)\,\mathrm{d}r.$$

Le débit volumique par unité de longueur de cylindre est défini par

$$Q(\theta) = \frac{D_\mathrm{v}(\theta)}{L}$$

d'où

$$\boxed{Q(\theta) = \int_a^{a+h} v(r,\theta)\,\mathrm{d}r}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
Q(\theta) &= \int_a^{a+h} a\Omega + \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\left[(r-a)^2 - 2(r-a)h\right]\mathrm{d}r \\
&= a\Omega h + \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\int_a^{a+h}\left[(r-a)^2 - 2(r-a)h\right]\mathrm{d}r \\
&= a\Omega h + \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\left\{\left[\frac{(r-a)^3}{3}\right]_a^{a+h} - h\left[(r-a)^2\right]_a^{a+h}\right\} \\
&= a\Omega h + \frac{\rho g\cos\theta}{2\eta}\left[\frac{h^3}{3} - h^3\right]
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{Q(\theta) = a\Omega h - \frac{\rho g h^3\cos\theta}{3\eta}}.$$

**4.** En notant $Q(\theta) = Q$, la relation précédente s'écrit

$$\frac{\rho g h^3 \cos\theta}{3\eta} - a\Omega h + Q = 0$$

qui est bien de la forme demandée avec

$$\boxed{F(h) = \frac{\rho g h^3 \cos\theta}{3\eta} - a\Omega h + Q}.$$

**5.** Formons la dérivée

$$F'(h) = \frac{\rho g h^2}{\eta}\cos\theta - \Omega a.$$

On ne peut avoir $F'(h) = 0$ que pour $\cos\theta > 0$, pour la valeur

$$h_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}}.$$

Dressons le tableau de variation :

| $h$ | $0$ | | $h_\mathrm{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(h)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(h)$ | $Q$ | $\searrow$ | $F(h_\mathrm{m})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Le minimum vaut

$$\begin{aligned}F(h_\mathrm{m}) &= \frac{\rho g}{2\eta}\cos\theta \frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}\sqrt{\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}} \\ &\quad - \Omega a \sqrt{\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}} + Q \\ &= \frac{\Omega a}{3}\sqrt{\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}} - \Omega a \sqrt{\frac{\Omega a \eta}{\rho g \cos\theta}} + Q\end{aligned}$$

soit

$$F(h_\mathrm{m}) = Q - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Omega^3 a^3 \eta}{\rho g \cos\theta}}.$$

La fonction $F$ s'annule si son minimum est négatif, soit $F(h_\mathrm{m}) < 0$, c'est-à-dire pour

$$\boxed{Q < Q_\mathrm{max}(\theta) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Omega^3 a^3 \eta}{\rho g \cos\theta}}}.$$

La valeur minimale de $Q_\mathrm{max}(\theta)$ est atteinte pour $\theta = 0$, où $\cos\theta = 1$. On en déduit une condition sur $Q$ valable pour tout angle $\theta$ :

$$\boxed{Q < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Omega^3 a^3 \eta}{\rho g}}}.$$

**6.** Le débit massique maximum de sirop d'érable à travers une section du cylindre vaut

$$D_\mathrm{m,max} = \rho Q_\mathrm{max} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Omega^3 a^3 \rho^2 \eta}{g}}$$

Sur une période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$, toute la masse autour du cylindre aura traversé la section du cylindre, soit

$$M_\mathrm{max} = D_\mathrm{m,max} T = \frac{2\pi}{\Omega} D_\mathrm{m,max}.$$

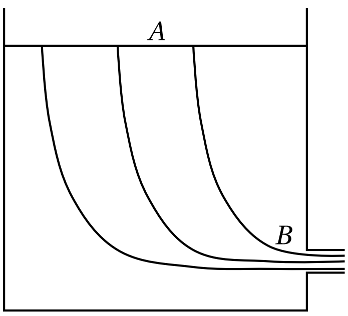
On obtient

$$\boxed{M_\mathrm{max} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{a^3 \rho^2 \Omega \eta}{g}}}.$$

# Partie II — Oscillateur à relaxation

## 1 Vidange d'un réservoir

**1.** Allure des lignes de courant :




**2.** Le théorème de Bernoulli s'énonce :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = C(\mathcal{L})$$

le long d'une ligne de courant.
En un point $A$ de la surface libre et un point $B$ au niveau de l'orifice, on a donc

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + g z_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + g z_B.$$

On a $P_A = P_B = P_0$ d'où, comme $z_A = h$ :

$$v_B^2 + 2g z_B = v_A^2 + 2gh.$$

L'écoulement étant incompressible, la conservation du débit volumique s'écrit, entre la section de la surface libre et la section de l'orifice

$$S v_A = \sigma v_B.$$

On a donc

$$v_B^2 + 2g z_B = \frac{\sigma^2}{S^2} v_B^2 + 2gh,$$

d'où

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2g(h-z_B)}{1-\frac{\sigma^2}{S^2}}}}\,.$$

Le débit sortant en $B$ vaut $D_s = \sigma v_B$, soit

$$\boxed{D_s = \sigma\sqrt{\frac{2g(h-z_B)}{1-\frac{\sigma^2}{S^2}}}}\,.$$

**3.** La vitesse d'un point de la surface libre est donnée par

$$v_A = -\frac{dh}{dt}$$

car $h(t)$ décroît au cours du temps quand le récipient se vide. On a donc

$$\dot{h} = -v_A = -\frac{\sigma}{S}v_B\,,$$

soit

$$\boxed{\dot{h} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{2g(h-z_B)}{1-\frac{\sigma^2}{S^2}}}}\,.$$

Si $\sigma \ll S$, on a $\frac{\sigma^2}{S^2} \ll 1$ ; on peut alors écrire

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g(h-z_B)}}$$

et

$$\boxed{\dot{h} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h-z_B)}}\,.$$

**4.** On calcule $\boxed{D_s = 1{,}2\times10^{-3}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}} = 1{,}2\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}}$.

## 2 Influence du siphon

**5.** On applique la relation de Bernoulli entre un point $A$ à la surface libre et le point $D$ à la sortie du siphon, sur une même ligne de courant :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{v_D^2}{2} + \frac{P_D}{\rho} + gz_D\,.$$

On a d'une part $P_A = P_D = P_0$. D'autre part l'hypothèse $\sigma \ll S$ revient à considérer $v_A \ll V_D$. On en déduit

$$gh = \frac{v_D^2}{2} + gz_D\,,$$

d'où

$$v_D = \sqrt{2g(h-z_D)}\,.$$

Le débit sortant est donné par $D_s = \sigma v_D$, soit

$$\boxed{D_s = \sigma\sqrt{2g(h-z_D)}}\,.$$

**6.** Le débit étant aussi par

$$D_s = Sv_A = -S\frac{dh}{dt}$$

on en déduit

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h-z_D)} = 0}\,.$$

**7.** Séparons les variables :

$$dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h-z_D}}$$

Le siphon se désamorce à l'instant $t_1$ tel que $h(t_1) = z_B$ : de l'air entre en $B$. On a donc

$$\int_0^{t_1} dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_{h_0}^{z_B}\frac{dh}{\sqrt{h-z_D}}$$

soit

$$t_1 = -\frac{2S}{\sigma\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h-z_D}\right]_{h_0}^{z_B}\,.$$

Le siphon se désamorce au bout de la durée

$$\boxed{t_1 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_0-z_D} - \sqrt{z_B-z_D}\right)}\,. \qquad (1)$$

*Remarque.*

L'énoncé demandait de déterminer $h(t)$ (il était plus simple de déterminer directement $t_1$).

**Première méthode**

Par séparation des variables :

$$\frac{dh}{\sqrt{h-z_D}} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S}dt$$

d'où

$$\int_{h_0}^{h(t)}\frac{dh}{\sqrt{h-z_D}} = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S}\int_0^t dt\,,$$

soit

$$2\left[\sqrt{h(t)-z_D} - \sqrt{h_0-z_D}\right] = -\frac{\sigma\sqrt{2g}}{S}t\,.$$

On en déduit

$$\sqrt{h(t)-z_D} = \sqrt{h_0-z_D} - \frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t$$

d'où

$$\boxed{h(t) = z_D + \left[\sqrt{h_0-z_D} - \frac{\sigma}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right]^2}\,.$$

**Deuxième méthode**

On part de

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h-z_D)}\,,$$

on élève au carré, soit

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{S^2}2g(h-z_D)\,,$$

puis on dérive par rapport au temps :

$$2\frac{dh}{dt}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{2g\sigma^2}{S^2}\frac{dh}{dt}\,,$$

d'où
$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g\sigma^2}{S^2}.$$
On en déduit
$$h(t) = \frac{g\sigma^2}{2S^2}t^2 + At + B.$$
D'une part $h(0) = B = h_0$. D'autre part
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(0) = A = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h_0 - z_D)},$$
d'où
$$h(t) = \frac{g\sigma^2}{2S^2}t^2 - \frac{\sigma t}{S}\sqrt{2g(h_0 - z_D)} + h_0$$
qui est la forme développée du résultat établi par la première méthode.

## 3 Réservoir alimenté

**8.** Le débit sortant par l'orifice du siphon, $D_\mathrm{s}$, est égal au débit $Sv_A$ dû au mouvement de la surface libre, auquel il faut ajouter le débit incident $D_\mathrm{i}$ :
$$D_\mathrm{s} = Sv_A + D_\mathrm{i}.$$
*On peut raisonner sur le volume $V = Sh(t)$ d'eau dans le récipient. Pendant $\mathrm{d}t$, il varie de $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}t$ ; cette variation est directement reliée au volume entrant $D_\mathrm{i}\,\mathrm{d}t$ et au volume sortant $D_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t$ par*
$$S\,\mathrm{d}h = D_\mathrm{i}\,\mathrm{d}t - D_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t$$
*et on retrouve*
$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{i} - D_\mathrm{s},$$
*soit*
$$D_\mathrm{s} = D_\mathrm{i} - S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{i} + Sv_A.$$
On a donc
$$\sigma\sqrt{2g(h - z_D)} = -S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + D_\mathrm{i}.$$
La hauteur $h(t)$ vérifie alors l'équation différentielle
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h - z_D)} = \frac{D_\mathrm{i}}{S}}.$$

**9.** En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0$, et l'équation différentielle s'écrit
$$\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g(h_\mathrm{s} - z_D)} = \frac{D_\mathrm{i}}{S}.$$
On a donc
$$2g(h_\mathrm{s} - z_D)\sigma^2 = D_\mathrm{i}^2$$
d'où
$$\boxed{h_\mathrm{s} = \frac{D_\mathrm{i}^2}{2g\sigma^2} + z_D}.$$
Cette solution n'est pas acceptable si la valeur de $h_\mathrm{s}$ associée à un débit $D_\mathrm{i}$ est telle que $h_\mathrm{s} < z_B$ : si $h_\mathrm{s} < z_B$, le siphon est en effet désamorcé, ce qui rend caduque les calculs effectués précédemment.

**10.** Lorsque le siphon est désamorcé, le débit sortant est nul ; on a alors
$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{i}.$$
**La hauteur croît de façon affine avec le temps :**
$$\boxed{h(t) = h(t_0) + \frac{D_\mathrm{i}}{S}(t - t_0)}.$$

**11.** Pour que $h(t)$ oscille, il faut que l'on ait alternance de phases où $h(t)$ augmente et où $h(t)$ diminue.

Nous venons de voir que lorsque le siphon est désamorcé, $h(t)$ croît au cours du temps. Le niveau d'eau augmente jusqu'à atteindre $h = z_C$ où le siphon devient amorcé.

Il faut alors que $h(t)$ diminue pour observer un régime oscillatoire.

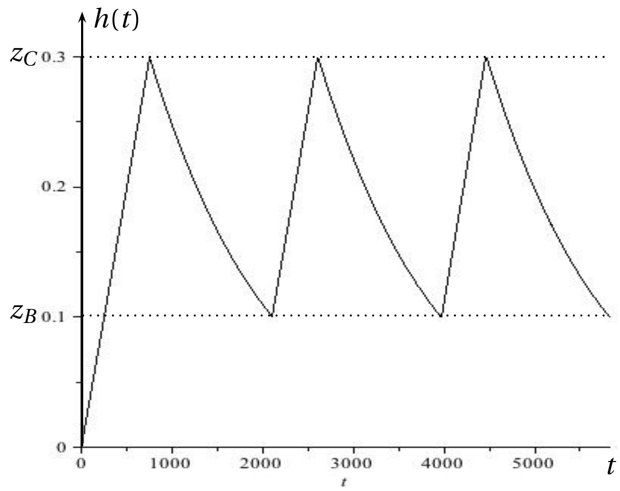
Quand le siphon est amorcé, on a établi
$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{i} - D_\mathrm{s}(h) = D_\mathrm{i} - \sigma\sqrt{2g(h - z_D)}.$$
Le récipient commencera alors à se vider si
$$D_\mathrm{i} < D_\mathrm{s}(z_C) = D_\mathrm{c}.$$
Le débit incident doit donc être plus faible que la valeur critique
$$\boxed{D_\mathrm{c} = \sigma\sqrt{2g(z_C - z_D)}}.$$

**12.** Le comportement oscillatoire est une alternance de deux phases :

— une phase de remplissage du récipient au cours de laquelle $h(t)$ croît de façon affine ;

— une phase de vidange au cours de laquelle $h(t)$ décroît en tendant asymptotiquement vers la valeur $h_\mathrm{s}$.

Évolution de la hauteur en fonction du temps, en partant du récipient initialement vide [1] :




1. Solution exacte calculée informatique ment.

La phase de remplissage a une durée $T_1$ donnée par

$$z_C = z_B + \frac{D_i}{S} T_1 \,,$$

soit

$$T_1 = \frac{S(z_C - z_B)}{D_i} \,.$$

Si on néglige le débit incident lors de la phase de vidange, l'équation (1) donne la durée de vidange partant d'une hauteur $h_0$. La durée de la phase de vidange à partir de la hauteur $z_C$ est donc

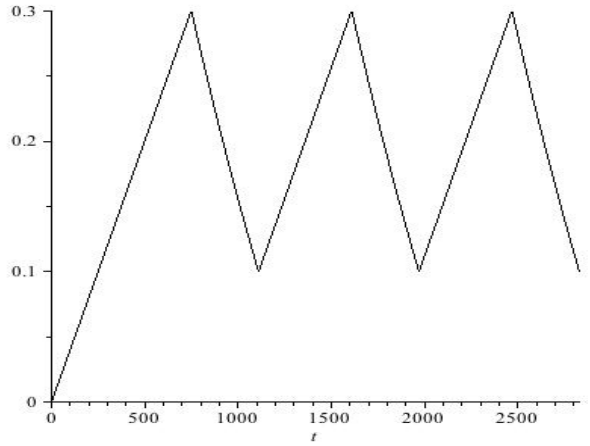
$$T_2 = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z_C - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}\right) .$$

La période du phénomène est alors donnée par $T = T_1 + T_2$, soit

$$\boxed{T = \frac{S(z_C - z_B)}{D_i} + \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z_C - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}\right)} \,.$$

**13.** On calcule $\boxed{D_c = 6{,}3 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 0{,}63\ \mathrm{L \cdot s^{-1}}}$ et $\boxed{T = 860\ \mathrm{s}}$.

La valeur de la période ne correspond pas à celle que l'on peut lire sur le graphe précédent. Ce dernier a été établi sans négliger le débit incident pendant la phase de vidange. Un tracé exact de la solution en considérant $D_i = 0$ quand le siphon est amorcé conduit à :




La période du phénomène correspond bien à la valeur calculée.