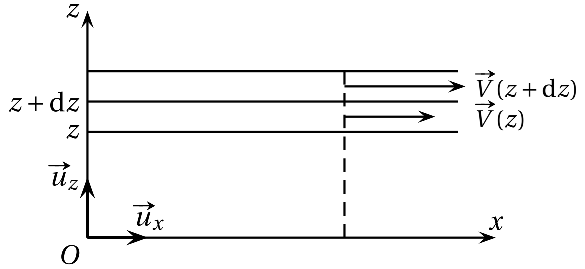
DM nº 5 bis — Bilans (difficile)

Mouvementd'une plaque tectonique

1 — Fluide newtonien

Le fluide parfait ne permet pas d'interpréter toutes les observations. Un autre modèle possible est celui de l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien incompressible dans lequel des couches très minces du fluide glissent avec frottements les unes sur les autres sans se mélanger.
L'espace est rapporté au trièdre $Oxyz$, l'axe Oz étant vertical et dirigé vers le haut.
Au contact entre deux couches, la contrainte tangentielle n'est donc plus nulle. Pour un fluide newtonien en écoulement unidirectionnel tel que $\vec{V} = V_x(z,t)\,\vec{u}_x$ la contrainte tangentielle (force par unité de surface) exercée par la couche inférieure sur la couche supérieure au niveau de la surface de contact est égale à $\vec{f}_x = -\eta \dfrac{\partial V_x(z,t)}{\partial z}\,\vec{u}_x$, où η est la viscosité dynamique du fluide.
Le fluide étudié, de masse volumique ρ, est un fluide newtonien incompressible en écoulement laminaire entre deux plans parallèles au plan Oxy, de dimensions infinies selon Oy. Le régime établi est permanent.
En un point de l'écoulement la vitesse eulérienne est $\vec{V} = V_x(z)\,\vec{u}_x$.
L'invariance par translation selon Oy donne V_x indépendante de y.



1. Justifier que V_x ne dépend pas de x.

2. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide dans les conditions de l'écoulement.

3. Rappeler l'expression des forces volumiques :
— de pression
— de pesanteur.

4. En considérant une particule de fluide élémentaire de volume $d\tau = dx\,dy\,dz$, montrer que la résultante des actions visqueuses s'écrit

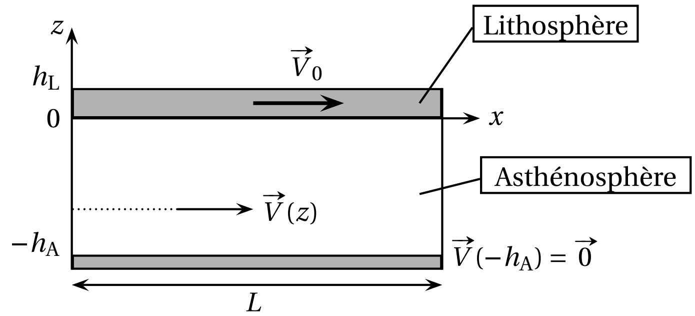
$$\delta \vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{d^2 V}{dz^2}\, d\tau\, \vec{u}_x\,.$$

5. Établir l'équation :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho \vec{g} + \eta \frac{d^2 V}{dz^2}\,\vec{u}_x = \vec{0}\,. \tag{1}$$

2 — Mouvement d'une plaque tectonique

Une plaque tectonique, appelée aussi plaque lithosphérique, se déplace à vitesse constante $\vec{V}_0$ suivant Ox sur la partie la plus déformable du manteau terrestre appelée asthénosphère, assimilable à un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ.
Les masses volumiques de la lithosphère et de l'asthénosphère sont supposées égales.



La courbure de la Terre est négligée. Le plan Oxy est supposé horizontal, le milieu infini selon Oy et le champ de pesanteur uniforme.
L'origine des ordonnées est choisie au contact entre la plaque et l'asthénosphère.
L'asthénosphère a une épaisseur h_A, la plaque une épaisseur h_L et une longueur L ($L \gg h_\mathrm{A}$ et h_L). Le régime est permanent. La pression dans l'asthénosphère est notée $P(x,z)$.

6. La modélisation précédente appliquée à l'asthénosphère conduit à un glissement de plaques horizontales à la vitesse $\vec{V} = V(z)\vec{u}_x$ avec les conditions aux limites suivantes : $V(-h_\mathrm{A}) = 0$ et $V(0) = V_0$. Quelle interprétation physique donner à ces conditions ?

7. La pression P_0 uniforme à la surface de la plaque est supposée négligeable et le gradient horizontal de pression nul pour l'asthénosphère.

7.a) Montrer soigneusement que $P(z) = \rho g(h_\mathrm{L} - z)$ dans l'asthénosphère.

7.b) Exprimer la contrainte (force surfacique) tangentielle $\vec{f_x}$ qu'exerce le manteau sous la plaque en mouvement en fonction de V_0, η et h_A.

7.c) Déterminer le profil de vitesse $V(z)$ dans l'asthénosphère. Le représenter.

7.d) Exprimer en fonction de V_0, h_A et h_L le débit volumique D induit par le déplacement *de la lithosphère et de l'asthénosphère* par unité de longueur selon Oy.

8. Le modèle n'est pas satisfaisant car il ne rend pas vraiment compte des mouvements de convection du manteau supérieur. Le déplacement global de matière en surface de l'asthénosphère est maintenant compensé en profondeur par un flux de retour qui assure un débit globalement nul en tenant compte des mouvements de matière de l'ensemble lithosphère-asthénosphère.

8.a) Montrer que cela impose un gradient de pression horizontal non nul, indépendant de x et de z, noté $\dfrac{\partial P}{\partial x} = K$.

8.b) Quelle est dans ce cas l'expression du profil de vitesse ? On exprimera $V(z)$ en fonction de K, η, h_A, V_0 et z.
En utilisant les conditions aux limites et la conservation du débit volumique, montrer que

$$K = 2V_0\eta\frac{A}{h_\mathrm{A}^2} \quad \text{avec} \quad A = 6\left(\frac{h_\mathrm{L}}{h_\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

8.c) En déduire l'expression de $V(z)$ en fonction de V_0, A, h_A et z, puis le rapport $V(z)/V_0$ en fonction de A et de la variable réduite $Z = z/h_\mathrm{A}$, sous forme factorisée.

8.d) À quelle profondeur la vitesse s'annule-t-elle dans l'asthénosphère ?
Quelle est la vitesse de retour maximale ?
Tracer $V(z)/V_0$ en fonction de $Z = z/h_\mathrm{A}$ en prenant $A = 4$.

En réalité, cette valeur de h_A (à calculer) correspond à l'épaisseur de la couche supérieure du manteau terrestre.

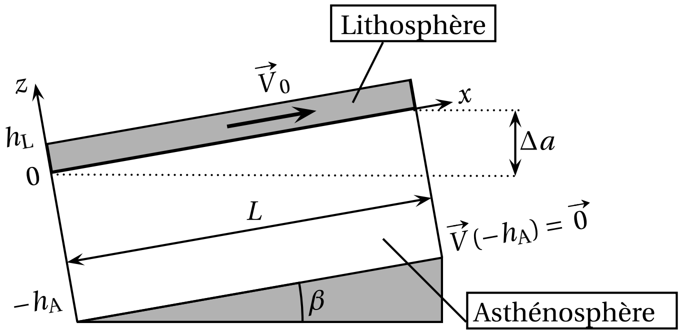
8.e) Donner l'expression de la contrainte tangentielle en fonction de z dans le fluide newtonien.

8.f) Vérifier que sous la plaque, cette contrainte a pour expression (en projection sur $\vec{u}_x$) :

$$f_x = -\eta V_0\frac{1+A}{h_\mathrm{A}}. \tag{3}$$

La comparer au résultat obtenu dans le modèle précédent. Ce résultat était-il prévisible à partir du profil des vitesses ?

9. Pour montrer qu'un gradient de pression horizontal est l'équivalent d'une très légère inclinaison de la plaque, on considère que l'ensemble plaque-asthénosphère est très légèrement incliné d'un angle $\beta \ll 1$ par rapport à l'horizontale. Ox représente maintenant la ligne de plus grande pente du plan incliné et Oz est toujours orthogonale à Ox. L'asthénosphère est toujours un fluide newtonien incompressible en écoulement laminaire permanent. La plaque de longueur L se déplace à la vitesse $\vec{V}_0$.



9.a) Donner la relation liant β, L et Δa, où Δa est la différence d'altitude entre les deux extrémités de la plaque (l'altitude est toujours mesurée suivant la verticale).

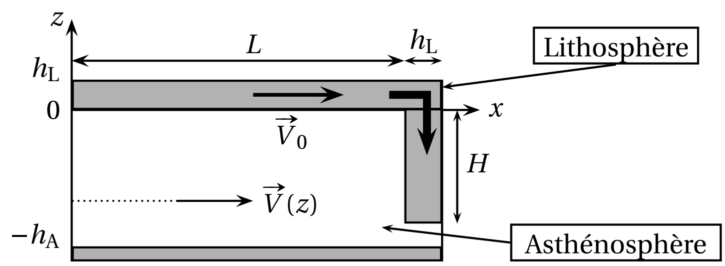
9.b) On reprend l'étude de la particule de fluide de la question **5.**

Que deviennent les projections de la relation (1) sur les axes Ox et Oz?

Justifier l'équivalence entre un écoulement le long d'un plan incliné sans gradient de pression le long de l'axe Ox et un écoulement horizontal avec gradient de pression horizontal et constant.

9.c) En déduire l'expression de Δa en fonction de η, V_0, A, h_A, g, ρ et L.

3 — Zone de subduction



La lithosphère est constituée par le même matériau que l'asthénosphère et n'en diffère que par une température inférieure de ΔT. Les masses volumiques de la lithosphère et de l'asthénosphère jusqu'ici considérées comme égales sont légèrement différentes et sont notées respectivement ρ_L et ρ. La plaque est entraînée dans son mouvement par le plongement supposé vertical de la lithosphère sous forme d'une zone de subduction dont la largeur reste h_L et qui s'enfonce dans l'asthénosphère sur une profondeur H. La plaque en subduction garde sa température inférieure de ΔT à celle de l'asthénosphère environnante.

Le coefficient d'expansion thermique (appelé coefficient de dilatation isobare en thermodynamique) de la plaque est

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P .$$

10. On rappelle que le poids apparent d'un corps est la somme (algébrique) de son poids et de la poussée d'Archimède qu'il subit.

Exprimer le poids apparent P_A de la zone en subduction par unité d'épaisseur suivant Oy en fonction de h_L, H, ρ_L, ρ et g.

En déduire son expression en fonction de h_L, H, ρ, g, α et ΔT.

Application numérique avec $\rho = 3200\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\alpha = 2\times10^{-5}\ \text{K}^{-1}$, $h_L = 100$ km, $H = 300$ km et $\Delta T = 800$ K.

11. Pour modéliser le mouvement de la plaque, on admet qu'elle est soumise à deux forces : une traction horizontale due à la zone de subduction, dont le module correspond au poids apparent de cette zone et une force de frottement visqueux due à la contrainte tangentielle exercée par l'asthénosphère (*cf.* question **8.f)**.

11.a) Montrer que la viscosité de l'asthénosphère s'écrit sous la forme

$$\eta = \eta_0 \frac{X^2}{2X+3}$$

avec $X = h_A/h_L$, et exprimer η_0 en fonction de P_A, h_L, L, et V_0. On utilisera l'expression de la force de traction F_x établie à partir de la relation (3).

Calculer numériquement η_0. On donne $L = 6000$ km et $V_0 = 5$ cm/an.

11.b) Tracer la courbe $\eta = f(X)$ avec $L = 6000$ km et $V_0 = 5$ cm/an, en faisant varier h_A de 0 à 3000 km, cette dernière valeur correspondant à l'épaisseur totale du manteau terrestre.

11.c) En utilisant l'expression de Δa établie en 2.4.c, exprimer la différence d'altitude $|\Delta a|$ entre les deux extrémités de la plaque en fonction de P_A, h_L, ρ, g et X.

11.d) Les signaux topographiques clairement associés au déplacement d'une plaque conduisent à imposer une valeur maximale à Δa. On prend $\Delta a < 500$ m.

Quelles sont les valeurs acceptables pour X ?

11.e) Proposer un encadrement pour l'épaisseur de l'asthénosphère et pour sa viscosité dynamique.

11.f) Définir le nombre de Reynolds de l'écoulement et justifier le fait que l'écoulement de l'asthénosphère soit qualifié de rampant.