DM n° 5 bis — Bilans — correction

Mouvement d'une plaque tectonique

1 — Fluide newtonien

1. Le fluide étant incompressible, son écoulement l'est aussi et

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0.$$

$\boxed{\text{La composante } V_x \text{ ne dépend pas de } x}$.

2. Le régime étant permanent, on a $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$.

L'accélération convective vaut

$$(\vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{V} = V(z)\frac{\partial V(z)\vec{u}_x}{\partial x} = \vec{0}.$$

L'accélération d'une particule de fluide, donnée par $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{V}$ vaut donc $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$.

3. Équivalent volumique des forces de pression :

$$\boxed{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}.$$

Équivalent volumique des forces de pesanteur :

$$\boxed{\rho\vec{g}}.$$

4. Considérons une particule de fluide élémentaire de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ située en (x, y, z).

Les forces visqueuses s'exercent sur les faces en z et en $z+\mathrm{d}z$: on a un gradient de vitesse perpendiculairement à ces faces.

La résultante des forces visqueuses est

$$\begin{aligned}\delta\vec{F}_{\text{visc}} &= +\eta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{u}_x - \eta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{u}_x\\ &= \eta\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{u}_x.\end{aligned}$$

Le volume de la particule de fluide étant $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on a

$$\delta\vec{F}_{\text{visc}} = \eta\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}\tau\,\vec{u}_x.$$

5. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide de masse $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}\tau$

$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau + \rho\vec{g}\,\mathrm{d}\tau + \eta\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}\tau\,\vec{u}_x.$$

Comme $\vec{a} = \vec{0}$, on obtient

$$\boxed{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \rho\vec{g} + \eta\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}\vec{u}_x = \vec{0}}. \qquad (1)$$

2 — Mouvement d'une plaque tectonique

6. On retrouve les conditions aux limites caractéristiques d'un fluide au contact d'un obstacle : **la vitesse du fluide est égale à celle de l'obstacle au niveau de la surface de contact**.

La lithosphère étant en translation à la vitesse $V_0\vec{u}_x$, on a donc $V(0) = V_0$.

La base du manteau étant au repos, on a $V(-h_A) = 0$.

7.a) La projection de (1) sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ conduit à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

La pression ne dépend donc que de z, soit $P(z)$.

La projection de (1) sur $\vec{u}_z$ s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g, \quad \text{pour } -h_A \leqslant z \leqslant 0.$$

On a donc

$$P(z) = P(0) - \rho g z, \quad \text{pour } -h_A \leqslant z \leqslant 0.$$

Attention : la relation (1), et donc l'expression de $P(z)$ obtenue qui en découle, ne sont valable que dans un fluide de masse volumique ρ, c'est-à-dire dans l'asthénosphère ; on ne peut écrire ces relations dans la lithosphère qui est solide !

La pression P_0 à la surface de la plaque est négligée. Une surface S d'asthénosphère est soumise au poids de la lithosphère qui la surplombe, qui vaut $\rho h_L S g$, ce qui correspond à la pression $P(0) = \rho g h_L$.

La pression dans l'asthénosphère ($z < 0$) est donc donnée par

$$\boxed{P(z) = \rho g(h_L - z)}.$$

7.b) Comme $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, la projection de (1) sur $\vec{e}_x$ conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} = 0.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \text{cte} = \frac{V(0) - V(-h_A)}{0 - (-h_A)} = \frac{V_0}{h_A}.$$

Le manteau *sous* la plaque exerce la contrainte

$$\vec{f}_x = -\eta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{u}_x,$$

soit

$$\boxed{\vec{f}_x = -\eta\frac{V_0}{h_A}\vec{u}_x}.$$

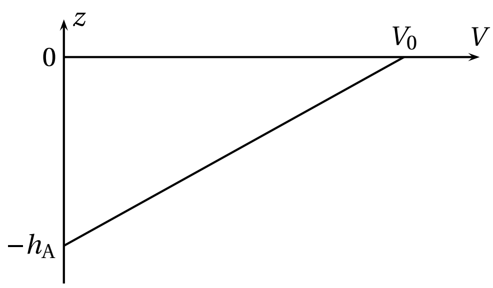
7.c) Intégrons de nouveau le résultat précédent :

$$V(z) = \frac{V_0}{h_A} z + C,$$

où C est une constante. On a $V(0) = C = V_0$, d'où

$$\boxed{V(z) = V_0\left(1 + \frac{z}{h_A}\right)}.$$

Le profil de vitesse est linéaire (écoulement de type Couette) :



Remarque : dans la lithosphère, la vitesse est uniforme et vaut V_0.

7.d) Par unité de longueur selon Oz, le débit volumique induit par le déplacement de la lithosphère *et* de l'asthénosphère s'écrit

$$D = \underbrace{V_0 h_A}_{\text{lithosphère}} + \underbrace{\int_{-h_A}^{0} V(z)\,\mathrm{d}z}_{\text{asthénosphère}},$$

soit

$$\begin{aligned} D &= V_0 h_L + V_0 \int_{-h_A}^{0} \left(1 + \frac{z}{h_A}\right) \mathrm{d}z \\ &= V_0 h_L + V_0 \left[z + \frac{z^2}{2h_A}\right]_{-h_A}^{0} = V_0 h_L + V_0 h_A - V_0 \frac{h_A}{2}, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{D = V_0\left(h_L + \frac{h_A}{2}\right)}.$$

8.a) Un flux de retour implique l'existence d'une zone avec $V > 0$ et d'une zone (inférieure) avec $V < 0$; à la séparation entre ces deux zones, on a donc $V = 0$. Comme $V(-h_A) = 0$, la vitesse doit alors s'annuler à deux profondeurs différentes, ce qui est incompatible avec un profil linéaire de vitesse. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} \neq 0$.

La projection de (1) selon $\vec{u}_x$ s'écrit

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\mathrm{d}^2 V(z)}{\mathrm{d}z^2}.$$

On a donc $\dfrac{\partial P}{\partial x} \neq 0$.

Il doit donc exister un gradient horizontal de pression non nul.

Le second membre étant indépendant de x, le gradient de pression ne dépend pas de x.

On a de plus $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$, d'où (théorème de Schwartz)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

Le gradient horizontal de pression ne dépend donc pas non plus de z.

Il est donc constant

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = K}.$$

8.b) L'équation (1) s'écrit

$$\eta \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\partial P}{\partial x} = K,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{Kz}{\eta} + A_1$$

et

$$V(z) = \frac{Kz^2}{2\eta} + A_1 z + A_2$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$V(0) = V_0 = A_2$$

et

$$V(-h_A) = \frac{K h_A^2}{2\eta} - A_1 h_A + V_0 = 0,$$

d'où $A_1 = \dfrac{V_0}{h_A} + \dfrac{K h_A}{2\eta}$.

On en déduit le profil de vitesse :

$$\boxed{V(z) = \frac{Kz^2}{2\eta} + \left(\frac{K h_A}{2\eta} + \frac{V_0}{h_A}\right) z + V_0}.$$

Le flux de retour assure un débit globalement nul :

$$\begin{aligned} D = 0 = V_0 h_L + \int_{-h_A}^{0} V(z)\,\mathrm{d}z &= V_0 h_L + \frac{K}{6\eta}\left[z^3\right]_{-h_A}^{0} \\ &+ \left(\frac{K h_A}{4\eta} + \frac{V_0}{2h_A}\right)\left[z^2\right]_{-h_A}^{0} + V_0\left(0 - (-h_A)\right) \\ &= V_0 h_L + \frac{K h_A^3}{6\eta} - \frac{H h_A^3}{4\eta} - \frac{V_0 h_A}{2} + V_0 h_A. \end{aligned}$$

soit

$$V_0\left(h_L + \frac{h_A}{2}\right) - \frac{K h_A^3}{12\eta} = 0.$$

On a donc

$$\boxed{K = 2V_0 \eta \frac{A}{h_A^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = 6\left(\frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2}\right)}.$$

8.c) En remplaçant K par son expression, on en déduit

$$\boxed{V(z) = V_0\left[A\frac{z^2}{h_A^2} + (1+A)\frac{z}{h_A} + 1\right]}\,.$$

En posant $Z = z/h_A$, on obtient

$$\frac{V(z)}{V_0} = 1 + (1+A)Z + AZ^2\,.$$

Cette expression se factorise sous la forme

$$1 + (1+A)Z + AZ^2 = (\alpha Z + 1)(\beta Z + 1)\,,$$

avec $\alpha\beta = A$ et $\alpha + \beta = A+1$. On peut donc prendre $\alpha = A$ et $\beta = 1$, d'où

$$\boxed{\frac{V(z)}{V_0} = (Z+1)(AZ+1)}\,.$$

8.d) On a $V(z) = 0$ d'une part pour $Z = -1$, qui correspond à la condition en $z = -h_A$.
La vitesse s'annule dans l'asthénosphère pour $Z = -1/A$, soit à la profondeur

$$\boxed{z = -\frac{h_A}{A}}\,.$$

Soit $f(Z) = (Z+1)(AZ+1)$. La vitesse est extremum pour

$$f'(Z_m) = 0 = 2AZ_m + A + 1\,,$$

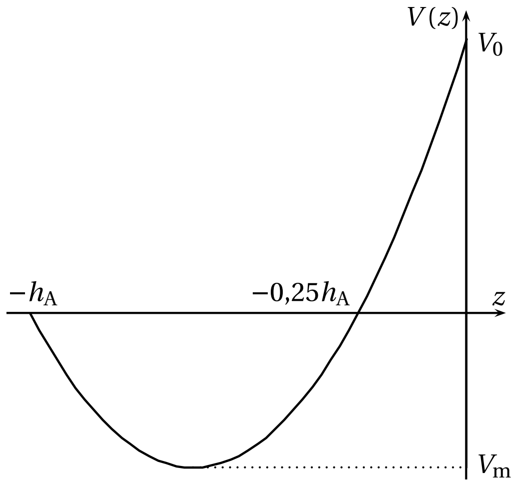
soit $Z_m = -\frac{1+A}{2A}$. On a alors

$$f(Z_m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2A}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2}\right) = -\frac{(A-1)^2}{4A}\,.$$

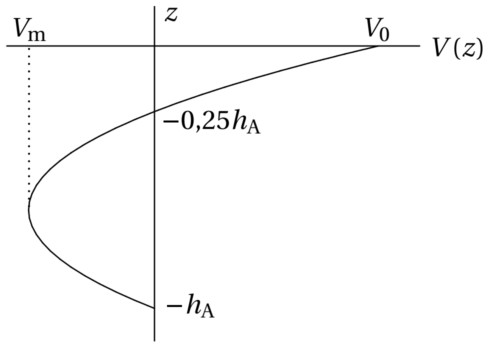
La vitesse de retour maximale vaut donc

$$\boxed{V_m = -V_0\frac{(A-1)^2}{4A}}\,.$$

En prenant $A = 4$, on obtient une annulation de la vitesse pour $z = -0{,}25h_A$, une vitesse de retour maximale pour $z_m = -0{,}625h_A$, dont la valeur est $V_m = -0{,}5625V_0$.



Le profil de vitesse a l'allure suivante :



Pour $A = 4$, le manteau terrestre a une épaisseur

$$\boxed{h_A = 6h_L}\,.$$

8.e) La contrainte tangentielle est donnée par

$$\vec{f}_x = -\eta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{u}_x\,,$$

soit

$$\boxed{\vec{f}_x = -\eta\frac{V_0}{h_A}\left[1 + A + 2A\frac{z}{h_A}\right]\vec{u}_x}\,.$$

8.f) Sous la plaque, en $z = 0$, la contrainte s'écrit alors

$$\boxed{\vec{f}_x = -\eta V_0\frac{1+A}{h_A}\vec{u}_x}\,.$$

Dans le modèle précédent, la contrainte sous la plaque s'écrivait

$$\vec{f}_x = -\eta\frac{V_0}{h_A}\vec{u}_x\,.$$

Comme $1 + A > A$, **la contrainte sous le manteau est plus élevée si l'on tient compte du flux de retour**.
Ce résultat était prévisible à partir du profil des vitesses, car dans le second cas, la vitesse doit s'annuler sur une profondeur A fois plus faible ; le taux de variation de la vitesse — et donc la contrainte — est plus élevé dans ce cas.

9. ***Prise en compte de l'inclinaison de l'ensemble plaque-asthénosphère.***

9.a) On a $\sin\beta = \dfrac{\Delta a}{L}$. L'ensemble étant *très légèrement incliné*, on a $\beta \ll 1$, et on linéaire le résultat précédent en

$$\boxed{\beta = \frac{\Delta a}{L}}\,.$$

9.b) La relation (1) projetée sur l'axe Ox conduit à

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \sin\beta + \eta\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = 0\,,$$

soit avec $\sin\beta \approx \beta$, d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g\frac{\Delta a}{L} + \eta\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = 0}\,. \qquad (2)$$

La projection sur Oz donne

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\cos\beta = 0\,.$$

Comme $\beta \ll 1$, on a $\cos\beta \approx 1$ et

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0}\,.$$

Dans le cas d'un écoulement horizontal avec un gradient de pression K horizontal et constant, on a établi

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = \frac{K}{\eta} = \text{cte}\,. \tag{3}$$

En considérant un écoulement le long d'un plan incliné sans gradient de pression le long de Ox (donc avec $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$), la projection sur Ox de l'équation de Navier-Stokes (2) conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\rho g \Delta a}{\eta L} = \text{cte}\,. \tag{4}$$

Les deux expressions (3) et (4) ont la même forme ; on a donc équivalence entre les deux écoulements proposés.

9.c) En identifiant les expressions (3) et (4), on peut écrire

$$\frac{K}{\eta} = \frac{\rho g \Delta a}{\eta L}\,,$$

d'où

$$\Delta a = \frac{KL}{\rho g}\,.$$

On a établi à la question 2.3.b l'expression du gradient horizontal de pression :

$$K = 2V_0\eta\frac{A}{h_\mathrm{A}^2}\,.$$

On a donc

$$\boxed{\Delta a = \frac{2LV_0\eta A}{\rho g h_\mathrm{A}^2}}\,.$$

La partie supérieure de l'asthénosphère est entraînée « vers la droite » par la lithosphère qui se translate à la vitesse $\vec{V}_0$; le flux de retour dans la partie inférieure de l'asthénosphère est due au mouvement de chute « vers la gauche » sous l'effet du poids.

3 — Zone de subduction

10. Le poids de la zone de subduction par unité d'épaisseur suivant Oy est $P_\mathrm{S} = h_\mathrm{L} H \rho_\mathrm{L} g$.

Cette zone subit la poussée d'Archimède, de module $\Pi = h_\mathrm{L} H \rho g$.

Le poids apparent P_A de la zone en subduction par unité d'épaisseur suivant Oy est donc donné par

$$P_\mathrm{A} = P_\mathrm{S} - \Pi\,,$$

soit

$$\boxed{P_\mathrm{A} = h_\mathrm{L} H(\rho_\mathrm{L} - \rho) g}\,.$$

Compte tenu de la dilatation de la plaque, on a

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta T} = \frac{\rho_\mathrm{L} - \rho}{T_\mathrm{L} - T_\mathrm{A}} = -\alpha\rho\,.$$

En notant $\Delta T = T_\mathrm{A} - T_\mathrm{L}$, on a $\rho_\mathrm{L} - \rho = \alpha\rho\Delta T$, d'où

$$\boxed{P_\mathrm{A} = h_\mathrm{L} H \rho g \alpha \Delta T}\,.$$

On calcule $\boxed{P_\mathrm{A} = 1{,}5 \times 10^{13}\ \mathrm{N}}$.

11. ***Contraintes sur la plaque.***

11.a) La force de viscosité s'exerçant sur une largeur unité selon Oy de la plaque (donc de surface $S = L \times 1$) est

$$F_x = L f_x = -\eta L V_0 \frac{1+A}{h_\mathrm{A}} = -\eta L V_0 \frac{1+A}{h_\mathrm{A}}\,.$$

La plaque ayant une vitesse uniforme, la principe de la dynamique projeté sur Ox s'écrit

$$0 = f_{x,\mathrm{L}} + P_\mathrm{A}\,,$$

soit

$$0 = -\eta L V_0 \frac{1+A}{h_\mathrm{A}} + P_\mathrm{A}\,.$$

On a donc

$$\eta = \frac{h_\mathrm{A} P_\mathrm{A}}{LV_0(1+A)} = \frac{h_\mathrm{L} P_\mathrm{A}}{LV_0}\frac{X}{1+A}\,.$$

On a $A = 6\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\right)$ soit $1 + A = 4 + \frac{6}{X}$, d'où

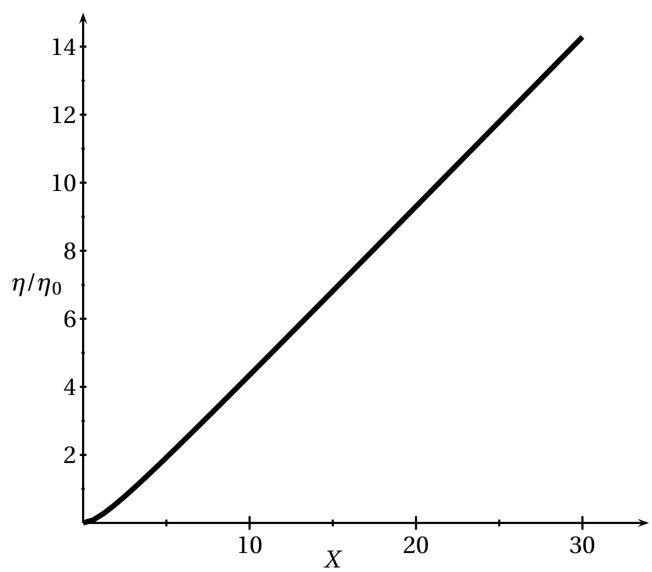
$$\eta = \frac{h_\mathrm{L} P_\mathrm{A}}{LV_0}\frac{X}{4+\frac{6}{X}} = \frac{h_\mathrm{L} P_\mathrm{A}}{LV_0}\frac{X^2}{4X+6}\,,$$

de la forme

$$\boxed{\eta = \eta_0\frac{X^2}{2X+3}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\eta_0 = \frac{h_\mathrm{L} P_\mathrm{A}}{2LV_0}}$$

On calcule $\boxed{\eta_0 = 7{,}9 \times 10^{19}\ \mathrm{Pl}}$.

11.b) Avec $h_\mathrm{L} = 100$ km, une variation de h_A de 0 à 3 000 km correspond à une variation de X de 0 à 30, et η varie de 0 à $14{,}3\eta_0$.



11.c) On a établi

$$\Delta a = \frac{2LV_0\eta A}{\rho g h_A^2}$$

soit en utilisant l'expression de η précédente :

$$\Delta a = \frac{2LV_0 A}{\rho g h_A^2}\frac{h_L P_A}{2LV_0}\frac{X^2}{2X+3} = \frac{P_A}{\rho g}\frac{h_L}{h_A^2}A\frac{X^2}{2X+3}.$$

Avec $X = h_A/h_L$ et $A = 6\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{2}\right)$, on en déduit

$$\Delta a = \frac{P_A}{\rho g}\frac{1}{X^2 h_L}6\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2X+3}$$

soit

$$\boxed{\Delta a = \frac{3P_A}{\rho g h_L}\frac{2+X}{X(2X+3)}}$$

11.d) La condition $\Delta a < 500$ s'écrit

$$\frac{3P_A}{\rho g h_L}\frac{2+X}{X(2X+3)} < 500$$

soit numériquement

$$\frac{2+X}{X(2X+3)} < 3{,}49\cdot 10^{-2} = C$$

On se ramène alors à l'étude de la fonction

$$f(X) = X(2X+3)C - 2 - X = 2CX^2 + (3C-1)X - 2,$$

soit

$$f(X) = 6{,}98\times 10^{-2}X^2 - 8{,}95\times 10^{-1}X - 2,$$

et la condition se ramène à $f(X) > 0$.

L'équation $f(X) = 0$ admet deux racines de signes contraires : $X_1 = 14{,}8$ et $X_2 = -1{,}94$. On a $f(X) > 0$ pour $X > X_1$ ou $X < X_2$. Il faut retenir ici physiquement le domaine $X > 0$:

$\boxed{\text{les valeurs acceptables pour } X \text{ sont } X > 14{,}8}$.

11.e) La valeur $X = 14{,}8$ correspond à $h_A = 1480$ km. L'énoncé précisant que $h_A < 3000$ km, on en déduit un encadrement pour l'épaisseur de l'asthénosphère :

$$\boxed{1480\ \text{km} < h_A < 3000\ \text{km}}.$$

D'après l'expression $\eta = \eta_0\frac{X^2}{2X+3}$, on en déduit un encadrement pour la viscosité dynamique de l'asthénosphère :

$$\boxed{5{,}31\times 10^{21}\ \text{Pl} < \eta < 11{,}3\times 10^{21}\ \text{Pl}}.$$

et pour sa viscosité dynamique.

11.f) Le nombre de Reynolds correspondant à l'écoulement dans l'asthénosphère est

$$\boxed{\mathcal{R}\text{e} = \frac{\rho h_A V_0}{\eta}}.$$

On calcule $\boxed{\mathcal{R}\text{e} \approx 10^{-21}}$. On est dans le domaine $\mathcal{R}\text{e} \ll 1$, qui correspond aux écoulements qualifiés de rampants.