

Fascicule d'exercices Physique des ondes — équation de d'Alembert

Autour de la corde vibrante

1 — Résonance sur une corde vibrante

1. Un élément de la corde $d\vec{\ell}$ est soumis, en plus de la tension à chaque extrémité, à la force de Laplace $d\vec{F}_L$. Au premier ordre, on a $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x$, et

$$d\vec{F}_L = Idx \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_y = I_0 B_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{L} dx \vec{e}_z.$$

Notons T la tension de la corde.

Le principe de la dynamique appliqué à cet élément de corde de masse $dm = \mu dx$ s'écrit, en projection sur \vec{e}_z :

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = I_0 B_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{L} dx + T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{I_0 B_0}{\mu} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \cos \omega t,$$

avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$

2. On remplace $z(x, t)$ par l'expression proposée dans l'équation différentielle, et on obtient

$$C = \frac{I_0}{B_0} \mu \frac{1}{\frac{c^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2} \quad \text{pour } \omega \neq \frac{\pi c}{L}.$$

Lorsque $\omega \rightarrow \frac{\pi c}{L}$, qui est la pulsation du mode fondamental, on a $C \rightarrow \infty$: on observe un phénomène de résonance. Dans la pratique, l'amplitude n'est pas infinie!

2 — Corde vibrante

1. Notons T la tension de la corde, considérée comme uniforme (résultat obtenu en projetant le PFD selon Ox).

Le principe fondamental de la dynamique pour un élément de corde compris entre les abscisses x et $x + dx$ s'écrit

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t). \quad (1)$$

Projetons (1) selon \vec{e}_y :

$$\begin{aligned} \mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -T \sin \alpha(x, t) + T \sin \alpha(x + dx, t) \\ &\simeq -T \alpha(x, t) + T \alpha(x + dx, t) \end{aligned}$$

Comme $d\ell \simeq dx$, on a

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \quad \text{avec } \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

On en déduit

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

L'équation (2) est appelée **équation de d'Alembert**.

2. Soit L la longueur de la corde d'une guitare. Le mode fondamental est tel que

$$\Lambda = 2L = \frac{c}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La tension vaut donc $T = 4L^2 f^2 \mu$.

On donne $\mu \approx 1 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

La longueur a pour ordre de grandeur $L \approx 1 \text{ m}$; la fréquence a pour ordre de grandeur $f \approx 10^2 \text{ Hz}$. On en déduit $T \approx 4 \times 1 \times 100^2 \times 10^{-3} = 400 \text{ N}$.

En ordre de grandeur $T \approx 10^2 \text{ N}$.

3. Écrivons que $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$ est solution de (2) :

$$c^2 f''(x) + \omega^2 f(x) = 0,$$

soit

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right).$$

La condition $y(0, t) = 0, \forall t$ s'écrit $f(0) = 0 = B$. Finalement :

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right).$$

La condition $y(L, t) = 0, \forall t$ s'écrit

$$A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0.$$

Comme $A \neq 0$, on a $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$, d'où $\frac{\omega L}{c} = n\pi$.

Les seules pulsations possibles sont de la forme

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{c\pi}{L}.$$

4. La condition initiale se linéarise en

$$y(x, 0) = 3b \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - b \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right). \quad (3)$$

La solution générale du mouvement est une superposition des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right),$$

la condition initiale s'écrivant alors

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En identifiant avec (3), on en déduit que seuls les harmoniques $n = 1$ et $n = 3$ sont présents :

$$A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = 3b \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - b \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

valable $\forall x$, d'où $A_1 = 3b$ et $A_3 = -b$. On en déduit

$$y(x, t) = 3b \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{c\pi t}{L}\right) - b \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{3c\pi t}{L}\right).$$

► Cette onde n'est ni stationnaire, ni progressive.

3 — Corde vibrante

1. Question de cours : établir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

2. Toutes les solutions sont harmoniques.

Dans l'ordre :

- (1) onde progressive dans le sens x croissants;
- (2) onde progressive dans le sens x décroissants;
- (3) onde stationnaire;
- (4) et (5) superposition de deux ondes progressives de sens opposés.

On remarquera que le 4^e cas est en fait une onde stationnaire :

$$y_4(x, t) = A [\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx)] \\ = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

Le cas (5) n'est ni une onde progressive, ni une onde stationnaire.

3. Les conditions aux limites sont

$$y(0, t) = y(L, t) = 0; \quad \forall t.$$

Elles ne peuvent être vérifiées que par une onde stationnaire (présence de deux nœuds de vibration); seules les solutions y_3 et y_4 peuvent donc *a priori* convenir.

Si on considère la solution $y_4(x, t)$, la condition en $x = 0$ s'écrit $2A \cos(\omega t) = 0, \forall t$, d'où $A = 0$ et $y_4(x, t) = 0$. Cette solution ne peut convenir.

La solution $y_3(x, t)$ donne d'une part :

$$y_3(0, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] C = 0$$

d'où $C = 0$. D'autre part :

$$y_3(L, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] D \sin(kL) = 0.$$

On a donc soit $D = 0$, ce qui entraîne $y_3(x, t) = 0$ qui est exclus, soit $\sin(kL) = 0$. On a donc $kL = n\pi$, avec $n \in \mathbf{N}$.

De la relation de dispersion $\omega = kc$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; on déduit :

$$\omega_n = n \frac{c\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbf{N}.$$

4. D'après la question précédente,

$$y_3(x, t) = D [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \sin(kx).$$

La condition initiale s'écrit :

$$y_3(x, 0) = 0 = AD \sin(kx), \forall x.$$

On a donc soit $D = 0$, soit $A = 0$.

Le premier cas est exclus car on aurait $y_3(x, t) = 0$.

On a donc $A = 0$, ce qui donne

$$y_3(x, t) = DB \sin(\omega t) \sin(kx).$$

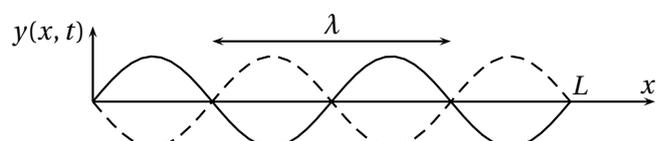
L'amplitude de la solution étant $Y = DB$, la solution de l'équation différentielle est donc

$$y_3(x, t) = Y \sin(\omega t) \sin(kx),$$

avec

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = n \frac{c\pi}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

5. L'observation de 5 nœuds de déplacement correspond à 4 fuseaux.



La longueur d'un fuseau étant $\lambda/2$, on a donc $L = 2\lambda$. Comme $\lambda = \frac{c}{f}$, où f est la fréquence, on en déduit, compte tenu de l'expression de la célérité c :

$$L = \frac{2}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

d'où :

$$\mu = \frac{4T}{L^2 f^2} = \frac{4 \times 10}{2^2 \times 10^2} = 0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

La corde a pour masse linéique $\mu = 100 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

4 — Corde lestée

1. On impose un nœud de vibration en $x = 0$; on cherche donc une solution en onde stationnaire, telle que la partie spatiale soit nulle pour $x = 0$. On écrit donc

$$y_1(x, t) = Y_1 \sin(kx) \cos(\omega t + \psi_1).$$

On impose de même un nœud de vibration en $x = L$; on cherche donc une solution en onde stationnaire, telle que la partie spatiale soit nulle pour $x = L$. On écrit donc

$$y_2(x, t) = Y_2 \sin[k(L-x)] \cos(\omega t + \psi_2).$$

2. On écrit d'une part la continuité de la corde en son milieu, soit

$$y_1\left(\frac{L}{2}, t\right) = y_2\left(\frac{L}{2}, t\right). \quad (4)$$

On écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m_0 , en projection selon Oy :

$$m_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(L/2, t) = T_{2y} + T_{1y}$$

où la projection selon Oy de la force de tension exercée par la partie droite de la corde est

$$T_{2y} = T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2, t)$$

et celle exercée par la partie gauche

$$T_{1y} = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2, t).$$

On a donc

$$m_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(L/2, t) = T_0 \left[\frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2, t) - \frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2, t) \right]. \quad (5)$$

3. Avec les expressions de $y_1(x, t)$ et $y_2(x, t)$ établies à la question 1, la relation (4) s'écrit

$$Y_1 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(\omega t + \psi_1) = Y_2 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(\omega t + \psi_2) \quad \forall t.$$

Cette relation peut être vérifiée si

$$\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$$

c'est-à-dire si $\frac{kL}{2} = n\pi$.

Les modes propres $k_n = n \frac{2\pi}{L}$ conviennent.

Les modes propres de la corde non lestée sont $k_n = n \frac{\pi}{L}$. Le sous-ensemble qui convient ici est constitué des **modes propres pairs de la corde non lestée**.

► Ces modes propres présentent un nœud de vibration au milieu, là où est présente la masse m_0 . Cette masse restant immobile pour ces modes, elle ne perturbe pas le mouvement de la corde, et ces modes continuent de pouvoir être observés.

4. Si $\sin(kL/2) \neq 0$, la relation de continuité s'écrit

$$Y_1 \cos(\omega t + \psi_1) = Y_2 \cos(\omega t + \psi_2) \quad \forall t.$$

On a donc $\psi_1 = \psi_2$ et $Y_1 = Y_2$. Notons ψ_0 le déphasage commune et Y_0 l'amplitude commune. On a donc

$$y_1(x, t) = Y_0 \sin(kx) \cos(\omega t + \psi_0)$$

et

$$y_2(x, t) = Y_0 \sin[k(L-x)] \cos(\omega t + \psi_0).$$

On a donc

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2) = k Y_0 \cos(kL/2) \cos(\omega t + \psi_0)$$

et

$$\frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2) = -k Y_0 \cos(kL/2) \cos(\omega t + \psi_0).$$

La relation (5) s'écrit, après simplification par $\cos(\omega t + \psi_0)$ car la relation doit être vérifiée pour tout t

$$-\omega^2 m_0 Y_0 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = -2k Y_0 T_0 \cos\left(\frac{kL}{2}\right),$$

soit

$$\omega^2 m_0 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 2k T_0 \cos\left(\frac{kL}{2}\right).$$

On en déduit avec $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$ et $\omega = kc$

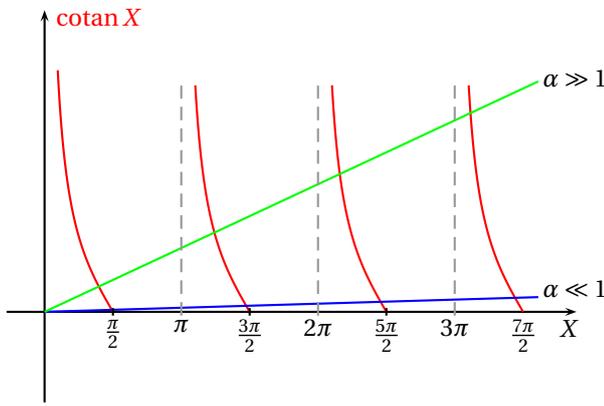
$$\cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} = \frac{m_0 \omega^2}{2k T_0} = \frac{m_0 \omega c}{2T_0} = \frac{m_0 \omega c}{2\mu c^2} = \frac{m_0}{\mu L} \left(\frac{\omega L}{2c}\right)$$

soit

$$\cotan\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \alpha \left(\frac{\omega L}{2c}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{m_0}{\mu L}.$$

On remarque que $\alpha = \frac{m_0}{m}$, où $m = \mu L$ est la masse de la corde.

En posant $X = \frac{\omega L}{2c}$, on se ramène à la résolution de $\cotan X = \alpha X$. Nous pouvons faire une résolution graphique, en cherchant les intersections des graphes de $f(X) = \cotan X$ et $g(x) = \alpha X$.



On peut distinguer deux cas limites.

Pour $\alpha \ll 1$, soit $m_0 \ll m$, on obtient les solutions

$$X_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \omega_n \approx (2n+1) \frac{c\pi}{L}.$$

On retrouve les modes impairs de la corde vibrante non lestée (la masse du lest est négligeable). Ces modes viennent en compléments des modes pairs $\omega_n = 2n \frac{c\pi}{L}$ trouvés précédemment.

Pour $\alpha \gg 1$, soit $m_0 \gg m$, on obtient les solutions

$$X_n \approx n\pi \quad \text{soit} \quad \omega_n \approx 2n \frac{c\pi}{L}.$$

On retrouve les modes pairs de la corde vibrantes, déjà déterminés précédemment : si la masse du lest est très élevée, il impose un nœud de vibration du fait de inertie (la corde ne peut le mettre en mouvement).

5 — Corde vibrante dont l'extrémité est mobile

Extrémité purement élastique

1. L'élongation vérifie l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} -$

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Avec $y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t)$, cette équation s'écrit $-\omega^2 Y(x) \cos(\omega t) - c^2 Y''(x) \cos(\omega t) = 0$, soit

$$Y''(x) + k^2 Y(x) = 0$$

où l'on a posé $k = \omega/c$.

2. La condition à la limite étant $y(L) = 0$, nous écrivons la solution générale de l'équation précédente sous la forme d'un sinus (un sinus étant nul quand son argument est nul, la prise en compte de la condition sera plus simple) :

$$Y(x) = A \sin(kx + \varphi).$$

La condition $Y(L) = 0$ s'écrit alors $Y(L) = A \sin(kL + \varphi) = 0$; on peut choisir $\varphi = -kL$, d'où

$$Y(x) = A \sin[k(x - L)].$$

3. La composante verticale de la tension de la corde à l'extrémité $x = 0$ est donnée par

$$T_y(0, t) = T \sin \alpha(0, t) \approx T \alpha(0, t) = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Elle est d'autre part égale à la tension du ressort dont l'élongation est $y(0, t)$, d'où la relation

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = K y(0, t).$$

On en déduit $T Y'(0) \cos(\omega t) = K Y(0) \cos(\omega t)$, d'où

$$T Y'(0) = K Y(0).$$

4. La condition précédente s'écrit

$$T k A \cos(kl) = -K A \sin(kL).$$

L'ensemble de ses solutions forme un ensemble discret. Cette équation peut s'écrire

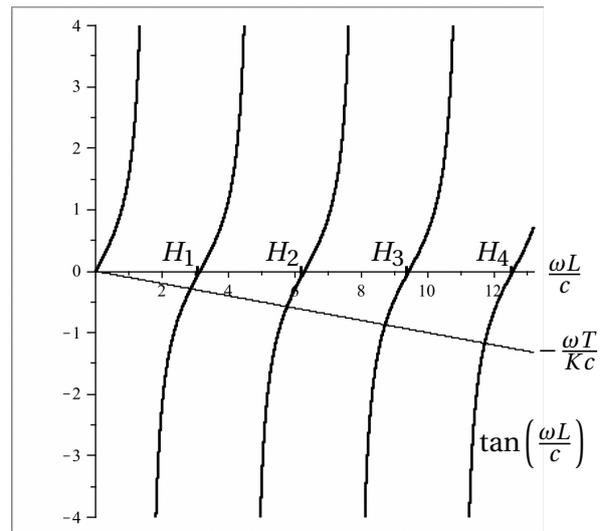
$$\tan(k_n L) = -\frac{k_n T}{K}.$$

Avec $\omega_n = k_n c$, on a de même

$$\tan\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) = -\frac{\omega_n T}{K c}.$$

5. On représente sur le même graphe

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \text{et} \quad g(\omega) = -\frac{\omega T}{K c} :$$



Les fréquences propres sont données par l'intersection des deux courbes. Les points correspondant aux harmoniques, de pulsations $n\omega_1$ dans le cas de l'extrémité rigide, sont notés H_n . On voit sur le graphe que $\omega_n < n\omega_1$: **l'effet d'une extrémité élastique est d'abaisser les fréquences propres.**

Extrémité purement massique

6. La composante verticale de la tension de la corde en $x = 0$ a été établie précédemment : $T_y(0, t) \approx T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'extrémité de la corde de masse M_0 s'écrit, en projection selon \vec{e}_y

$$M_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0, t) = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

7. Avec $y(x, t) = A \sin[k(x - L)] \cos(\omega t)$, on en déduit $-\omega^2 M_0 \sin(-kL) = Tk \cos(kL)$, d'où $\tan(kL) = \frac{Tk}{M_0 \omega^2}$. Comme $\omega = kc$, on en déduit

$$\tan(k_n L) = \frac{T}{M_0 c^2 k_n},$$

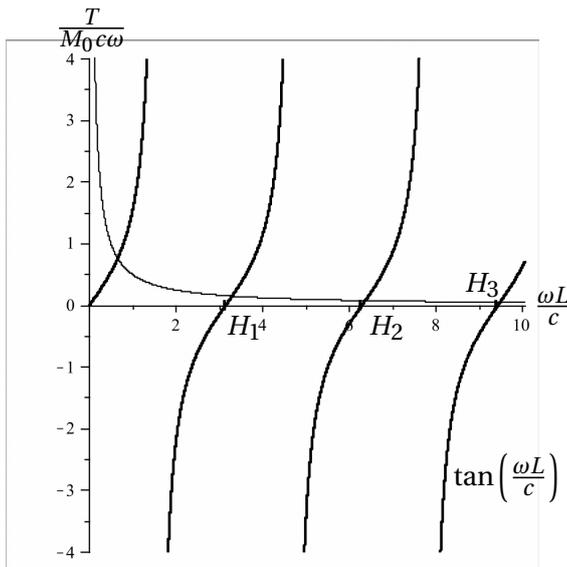
l'indice n précisant que les solutions forment un ensemble discret.

Comme $\omega = kc$, on a

$$\tan\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) = \frac{T}{M_0 c \omega_n}.$$

8. On représente sur le même graphe

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \text{et} \quad g(\omega) = \frac{T}{M_0 c \omega} :$$



Les fréquences propres sont données par l'intersection des deux courbes. Les points correspondant aux harmoniques, de pulsations $n\omega_1$ dans le cas de l'extrémité rigide, sont noté H_n . On voit sur le graphe que $\omega_n > n\omega_1$: l'effet d'une extrémité massique est d'élever les fréquences propres.

6 — Étude d'une corde pincée

1. La condition initiale portant sur la position de la corde s'écrit :

$$y(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{a}x & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ \frac{h(L-x)}{L-a} & \text{pour } a < x \leq L \end{cases}.$$

La condition initiale portant sur la vitesse s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

2. La vitesse de chaque point de la corde est donnée par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L} + \psi_n\right).$$

La condition initiale correspondante s'écrit alors :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin \psi_n = 0 \quad \forall x.$$

On en déduit $\sin \psi_n = 0$; on peut donc choisir $\psi_n = 0$, $\forall n$. On a alors :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \quad (6)$$

3. Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire de période $2L$ s'écrit :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$

avec :

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L F(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx.$$

Sur l'intervalle $[0, L]$, la fonction F coïncide par définition à l'élongation initiale : $F(x) = y(x, 0)$; on a donc :

$$b_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^a \frac{h}{a} x \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx + \int_a^L \frac{h(L-x)}{L-a} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right] = \frac{2}{L} \left[\frac{h}{a} \int_0^a x \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx + \frac{h}{L-a} \int_a^L (L-x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right].$$

Posons $k = \frac{n\pi}{L}$; les intégrales se calculent en intégrant par parties :

$$\int_0^a x \sin kx dx = \left[-\frac{x}{k} \cos(kx) \right]_0^a + \frac{1}{k} \int_0^a \cos(kx) dx = -\frac{a}{k} \cos(ka) + \frac{1}{k^2} [\sin(kx)]_0^a = -\frac{a}{k} \cos(ka) + \frac{1}{k^2} \sin(ka)$$

et

$$\int_a^L (L-x) \sin(kx) dx = \left[-\frac{L-x}{k} \cos(kx) \right]_a^L$$

$$-\frac{1}{k} \int_a^L \cos(kx) dx = \frac{L-a}{k} \cos(ka) - \frac{1}{k^2} \left[\sin(kx) \right]_a^L$$

$$= \frac{L-a}{k} \cos(ka) + \frac{\sin(ka)}{k^2}$$

car $\sin(kL) = 0$ d'après les conditions aux limites. On a donc :

$$b_n = \frac{2}{L} \left[-\frac{h}{k} \cos(ka) + \frac{h}{ak^2} \sin(ka) \right. \\ \left. + \frac{h}{k} \cos(ka) + \frac{h}{k^2(L-a)} \sin(ka) \right]$$

$$= \frac{2h}{k^2 a(L-a)} \sin(ka)$$

soit en remplaçant k par son expression :

$$b_n = \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right).$$

La fonction F se décompose sur \mathbb{R} en :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right).$$

Comme $y(x, 0) = F(x)$ sur $[0, L]$, on peut écrire :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right).$$

Or, d'après l'expression (6) établie à la question précédente :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En identifiant les deux dernières égalités, on peut en déduire $y_{0n} = b_n$. En remplaçant b_n par son expression, on en déduit le développement de la solution de l'équation d'onde :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right).$$

4. L'amplitude de l'harmonique de rang n est :

$$b_n = \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right).$$

Les amplitudes des harmoniques décroissent donc en $1/n^2$; elles sont rapidement très faibles quand n augmente. Le son ne sera pas très riche en harmoniques, c'est-à-dire pas très brillant à l'écoute.

5. L'amplitude de l'harmonique de rang n est proportionnelle à $\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)$. Elle est nulle si le point d'excitation de la corde a une abscisse a telle que $\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right) = 0$, soit $a = \frac{pL}{n}$, avec p entier. L'endroit où l'on excite la corde influe donc sur le timbre du son émis.

6. Lorsque a est très petit ($a \ll L$), on a $\sin \frac{n\pi a}{L} \sim \frac{n\pi a}{L}$ et $L-a \sim L$, et l'expression de b_n se simplifie en

$$b_n \sim \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 aL} n\pi \frac{a}{L},$$

soit :

$$b_n = \frac{2h}{n\pi}.$$

L'amplitude des harmoniques ne décroît plus qu'en $1/n$: le son émis est plus riche en harmoniques.

7. L'amplitude de l'harmonique de rang n varie comme

$$b_n = \frac{B}{n^2} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right).$$

On peut calculer le CGS pour les 30 premiers harmoniques avec Python par exemple, en utilisant l'expression

$$\frac{\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}.$$

Pour une attaque de la corde à $a = \frac{L}{4}$, on trouve $CGS = 1,18$; pour $a = \frac{L}{20}$, on obtient $CGS = 3,37$. Le son est plus brillant si on pince la corde en un point proche de son extrémité.

7 — Étude d'une corde frappée

1. La corde étant initialement au repos, on en déduit

$$y(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [0, L].$$

Les vitesses des points de la corde sont donnés à $t = 0$ par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x < a \\ u & \text{pour } a \leq x < a+e \\ 0 & \text{pour } a+e \leq x \leq L \end{cases}$$

2. La condition portant sur $y(x, 0)$ s'écrit :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\psi_n) = 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

d'où $\cos(\psi_n) = 0, \forall n$. Le choix $\psi_n = -\frac{\pi}{2}$ convient.

Comme $\cos\left(\frac{nc\pi t}{L} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)$, la solution de l'équation de d'Alembert est cherchée sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right). \quad (7)$$

3. Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire de période $2L$ s'écrit :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \quad (8)$$

avec :

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L V(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L V(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx.$$

Sur l'intervalle $[0, L]$, la fonction V coïncide par définition à la vitesse initiale : $V(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$; on a donc :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{a-\frac{e}{2}}^{a+\frac{e}{2}} u \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx.$$

Comme $e \ll L$, la fonction $\sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$, de période $2L$, varie très peu sur un intervalle de largeur e ; on peut donc considérer que pour $a - \frac{e}{2} \leq x \leq a + \frac{e}{2}$, elle vaut $\sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \approx \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$. On en déduit :

$$b_n = \frac{2}{L} u e \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

D'après (7) :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{L} y_{0n} \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{L} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Comme par construction $V(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$, en identifiant avec le développement (8) on obtient :

$$b_n = \frac{2ue}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = \frac{nc\pi}{L} y_{0n}$$

d'où l'amplitude de l'harmonique de rang n :

$$y_{0n} = \frac{2ue}{nc\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right).$$

La solution de l'équation de d'Alembert vérifiant les conditions initiales s'écrit alors :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ue}{nc\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right).$$

Les amplitudes des harmoniques décroissent en $1/n$, plus lentement que dans le cas d'une corde pincée (se reporter à l'exercice précédent, où l'on a établi une décroissance en $1/n^2$). **Le son d'un piano est plus riche en harmoniques que le son d'un clavecin (instrument à cordes pincées).**

4. L'amplitude de l'harmonique de rang n , donnée par

$$y_{0n} = \frac{2ue}{nc\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

est nulle si a , position du point d'impact du marteau sur la corde, est tel que $\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = 0$, soit $\frac{n\pi a}{L} = p\pi$, avec p entier. Il faut donc que

$$a_p = p \frac{L}{n} \quad \text{avec } p \text{ entier, } 1 \leq p \leq n-1.$$

On supprimera l'harmonique de rang $n = 7$ en choisissant $\frac{7\pi a}{L} = p\pi$, soit

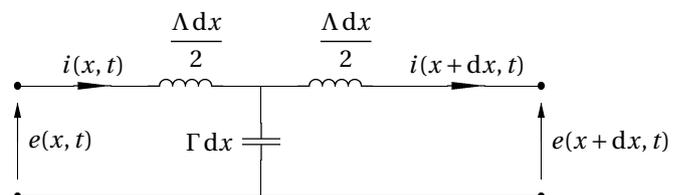
$$a = p \frac{L}{7}.$$

Comme $0 < a < L$, 6 positions conviennent, de $p = 1$ à $p = 6$.

Le modèle étudié ici est très simplifié. Le spectre du son ne dépend pas seulement de la position du point d'impact, mais aussi du poids et de la forme du marteau, du diamètre de la corde, de la durée du contact entre le marteau et la corde. Dans la pratique, la position du marteau n'est pas calculée de façon à éteindre des harmoniques, mais de façon à obtenir la sonorité voulue. En général, a/L varie de $1/12$ à $1/17$ pour un piano moderne.

Autour des lignes électriques

8 — Ligne électrique



On donne le schéma équivalent d'une portion de ligne de longueur dx .

1. Loi des mailles :

$$e(x, t) - e(x + dx, t) = \frac{\Lambda dx}{2} \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + \frac{\Lambda dx}{2} \frac{\partial i(x + dx, t)}{\partial t}$$

que l'on linéarise en

$$-\frac{\partial e}{\partial x} dx = \Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} dt,$$

d'où

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = 0.$$

Loi des nœuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial e}{\partial t}$$

soit

$$\Gamma \frac{\partial e}{\partial t} dx = i(x, t) - i(x + dx, t) = -\frac{\partial i}{\partial x} dx$$

d'où

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial i}{\partial x} = 0.$$

2. On a

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Lambda \Gamma \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

et la tension vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0.$$

Considérons

$$\underline{e}(x, t) = \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} + \beta e^{j[\omega(t+x/v)]}.$$

On a

$$\frac{\partial^2 \underline{e}}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \underline{e}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{e}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{e}(x, t).$$

En écrivant que $\underline{e}(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert, on obtient

$$-\omega^2 + \frac{\omega^2}{v^2 \Gamma \Lambda} = 0$$

d'où

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}.$$

Le terme $\alpha e^{j[\omega(t-x/v)]}$ correspond à une onde progressive dans le sens des x croissants; le terme $\beta e^{j[\omega(t+x/v)]}$ correspond à une onde progressive dans le sens des x décroissants.

On impose en $x = 0$

$$\underline{e}(0, t) = E_0 e^{j\omega t} = \alpha e^{j\omega t} + \beta e^{j\omega t}$$

d'où

$$\alpha + \beta = E_0.$$

La première équation couplée s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{i}}{\partial t} &= -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \underline{e}}{\partial x} = -\frac{1}{\Lambda} \left[-j \frac{\omega}{v} \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} + j \frac{\omega}{v} \beta e^{j[\omega(t+x/v)]} \right] \\ &= j \frac{\omega}{\Lambda v} \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} - j \frac{\omega}{\Lambda v} \beta e^{j[\omega(t+x/v)]} \end{aligned}$$

d'où en intégrant par rapport au temps

$$\underline{i} = \frac{\alpha}{\Lambda v} e^{j[\omega(t-x/v)]} - \frac{\beta}{\Lambda v} e^{j[\omega(t+x/v)]} + C(x)$$

où la « constante » d'intégration $C(x)$ est constante vis-à-vis de t , donc est *a priori* une fonction de x .

Le courant moyen (par rapport au temps) devant être nul, on a $C(x) = 0$, d'où en remplaçant v par son expression

$$\underline{i}(x, t) = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \alpha e^{j[\omega(t-x/v)]} - \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \beta e^{j[\omega(t+x/v)]}$$

La condition $\underline{e}(L, t) = \underline{Z} \underline{i}(L, t)$ s'écrit alors, en simplifiant par $e^{j\omega t}$,

$$\alpha e^{-j\omega L/v} + \beta e^{j\omega L/v} = \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [\alpha e^{-j\omega L/v} - \beta e^{j\omega L/v}]$$

On a donc $\alpha = E_0 - \beta$, d'où

$$\begin{aligned} (E_0 - \beta) e^{-j\omega L/v} + \beta e^{j\omega L/v} &= \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [(E_0 - \beta) e^{-j\omega L/v} - \beta e^{j\omega L/v}] \\ &= \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [(E_0 - \beta) e^{-j\omega L/v} - \beta e^{j\omega L/v}] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \beta \left[e^{j\omega L/v} - e^{-j\omega L/v} + \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} (e^{-j\omega L/v} + e^{j\omega L/v}) \right] \\ = E_0 e^{-j\omega L/v} \left(\underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} - 1 \right). \end{aligned}$$

On obtient

$$\beta = \left(\underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} - 1 \right) \frac{E_0 e^{-j\omega L/v}}{2 \underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \cos(\omega L/v) + 2j \sin(\omega L/v)}.$$

On a alors $\alpha = E_0 - \beta$.

3. On voit que si

$$\left(\underline{Z} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} - 1 \right) = 0$$

on a $\beta = 0$: il n'y a plus d'onde réfléchie, se déplaçant de $x = L$ à $x = 0$; on n'a alors qu'une onde dans le sens des x croissants, se déplaçant de $x = 0$ à $x = L$.

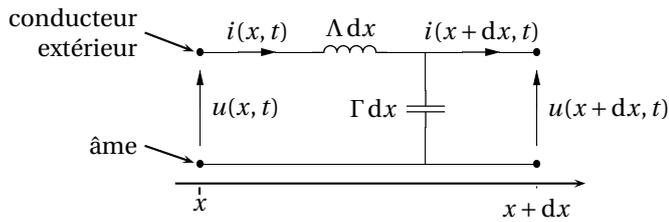
Il faut donc

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

➤ On retrouve l'expression de l'impédance caractéristique du câble.

9 — Câble coaxial

Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire dx du câble est :



1. La loi des maille s'écrit

$$u(x+dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} - u(x, t) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i(x, t) - i(x+dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

En écrivant la loi des nœuds et la loi des mailles, puis en les linéarisant, établir deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $u(x, t)$ et $i(x, t)$.

2. D'après la question précédente, on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0.$$

Les grandeurs $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient la même équation de d'Alembert.

L'inductance linéique d'un câble de longueur L est

$$\Lambda = \frac{L_c}{L} = \frac{33,4 \times 10^{-6}}{100} = 3,34 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Sa capacité linéique est

$$\Gamma = \frac{C_c}{L} = \frac{7,46 \times 10^{-9}}{100} = 7,46 \times 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On en déduit

$$c = 2,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Avec $u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, on a

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c} f'(t - x/c),$$

d'où

$$i(x, t) = \frac{1}{\Lambda c} f(t - x/c) = \sqrt{\Gamma \Lambda} u(x, t).$$

On a donc

$$u(x, t) = Z_c i(x, t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

Une onde progressive dans le sens des x décroissants est donnée par $u(x, t) = g(t + x/c)$. Un calcul similaire mène à

$$u(x, t) = -Z_c i(x, t).$$

4. Avec les valeurs de Λ , Γ précédemment calculées, on obtient $Z_c = 67 \Omega$.

5. Soit

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

D'après les relations courant-tension précédentes, on a

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right].$$

Quelle est alors l'expression du courant $i(x, t)$ le long du câble ?

6. On n'a plus proportionnalité entre $u(x, t)$ et $i(x, t)$ dans le cas général.

7. L'onde de courant associée à

$$u_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

est

$$i_i(x, t) = \frac{1}{Z_c} f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

8. Dans le cas où la ligne est en sortie ouverte, on doit avoir

$$i(L, t) = 0 \quad \forall t,$$

soit

$$f(t - L/c) = 0 \quad \forall t$$

ce qui correspondrait à $f = 0$ (fonction identiquement nulle).

L'onde décrite par $u_i(x, t)$ et $i_i(x, t)$ ne peut donc pas convenir.

Il doit donc exister une onde progressive dans le sens des x décroissants, appelée onde réfléchie, décrite par

$$u_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

l'onde de courant associée ayant comme expression

$$i_r(x, t) = -\frac{1}{Z_c} g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

L'onde résultante de tension dans le câble est alors

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

et l'onde de courant

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right].$$

9. Interprétation des coefficients :

r_I : coefficient de réflexion en intensité;

r_V : coefficient de réflexion en tension.

Dans le cas où la ligne est ouverte, on a

$$i(L, t) = i_i(L, t) + i_r(L, t) = 0$$

d'où

$$r_I = -1.$$

Comme $u_i(L, t) = Z_c i_i(L, t)$ et $u_r(L, t) = -Z_c i_r(L, t)$, on a

$$r_V = -1.$$

10. Le premier pic correspond au passage de l'onde incidente en $x = 0$; le second correspond au passage de l'onde réfléchie.

L'onde parcourt la longueur $2L = 200$ m lors de son aller-retour, pendant une durée mesurée à l'oscilloscope $\Delta t = 1 \mu\text{s}$. La célérité correspondante est

$$c = \frac{2L}{\Delta t}$$

soit $c = 2,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Cette valeur est tout à fait en accord avec la valeur déterminée à partir de l'inductance et de la capacité du câble.

11. Dans le cas où la ligne est fermée, on a

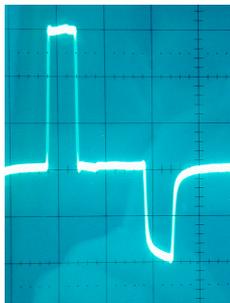
$$u(L, t) = u_i(L, t) + u_r(L, t) = 0.$$

On en déduit

$$r_V = -1 \quad \text{et} \quad r_I = 1.$$

La réflexion de la tension s'accompagne d'un changement de signe.

Allure de la courbe à l'oscilloscope :

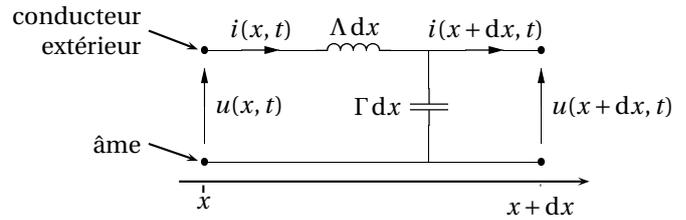


12. On remarque que l'amplitude de la tension réfléchie est plus faible que l'amplitude de la tension incidente, ce que le modèle considéré n'explique pas.

Il faudrait prendre en compte la résistance linéique des conducteurs du câble.

10 — Câble coaxial et impédance itérative

Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire dx du câble est :



1. La loi des mailles s'écrit

$$u(x + dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} - u(x, t) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}.$$

2. On déduit des équations précédentes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0.$$

Les grandeurs $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient la même équation de d'Alembert.

3. Le terme $u_i(x, t)$ correspond à une onde progressive dans le sens des x croissants : c'est l'onde incidente émise par le générateur.

Le terme $u_r(x, t)$ correspond à une onde progressive dans le sens des x décroissants : c'est l'onde issue de la réflexion de l'onde incidente à l'extrémité de la ligne.

4. Avec $u_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, on a

$$\frac{\partial i_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c} f'(t - x/c),$$

d'où

$$i_i(x, t) = \frac{1}{\Lambda c} f(t - x/c) = \sqrt{\Gamma} \Lambda u(x, t).$$

On a donc

$$u_i(x, t) = Z_c i_i(x, t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

Avec $u_r(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$, on a

$$\frac{\partial i_r}{\partial t} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u_r}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda c} g'(t + x/c),$$

d'où

$$i_r(x, t) = -\frac{1}{\Lambda c} g(t + x/c) = \sqrt{\Gamma} \Lambda u_r(x, t).$$

On a donc

$$u_r(x, t) = -Z_c i_r(x, t).$$

Finalement

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t - \frac{x}{c}\right) \right].$$

5. La résistance en $x = L$ impose la condition

$$u(L, t) = R i(L, t)$$

soit

$$u_i(L, t) + u_r(L, t) = \frac{R}{Z_c} [u_i(L, t) - u_r(L, t)].$$

On a donc

$$Z_z u_i(L, t) + Z_c u_r(L, t) = R u_i(L, t) - R u_r(L, t)$$

On en déduit

$$r_V = \frac{u_r(L, t)}{u_i(L, t)} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}.$$

Compte tenu des relations précédentes, on a

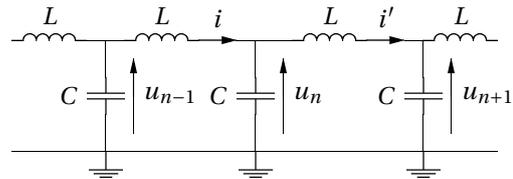
$$r_I = \frac{i_r(L, t)}{i_i(L, t)} = -r_V.$$

6. Il n'y a pas d'onde réfléchie si $r_V = 0$ et $r_I = 0$; c'est le cas si on prend

$$R = Z_c.$$

11 — Ligne LC discrète dans l'approximation continue

1. On considère l'élément de ligne suivant :



On écrit la relation courant-tension pour chaque bobine :

$$u_{n-1}(t) - u_n(t) = L \frac{di}{dt}$$

et

$$u_n(t) - u_{n+1}(t) = L \frac{di'}{dt}.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i - i' = C \frac{du_n}{dt}.$$

Dérivons-là :

$$\frac{di}{dt} - \frac{di'}{dt} = C \frac{d^2 u_n}{dt^2}$$

soit

$$\frac{u_{n-1}(t) - u_n(t)}{L} - \frac{u_n(t) - u_{n+1}(t)}{L} = C \frac{d^2 u_n}{dt^2}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On calcule $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, soit $f_0 = 8,0 \times 10^5$ Hz.

L'approximation continue consiste à ne considérer que les variations spatiales des tensions u_n ne se font que sur de « grandes distances ». On suppose ainsi que la distance caractéristique sur laquelle varie $u_n(t)$ est très supérieure à la taille a d'une cellule. On peut alors introduire la fonction continue des deux variables continues x et t , définie par $u(x = na, t) = u_n(t)$.

2. On effectue un développement limité à l'ordre 2 de $u(x + a, t)$:

$$u(x + a, t) = u(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En $x = na$, cette relation donne

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

De même

$$u(x - a, t) = u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

soit en $x = na$

$$u_{n-1}(t) = u_n(t) - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Additionnons les relations (9) et (10) :

$$u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) = 2u_n(t) + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En considérant $u(x, t) = u_n(t)$ en $x = na$, l'équation de récurrence s'écrit alors

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On obtient donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad v = a\omega_0.$$

► Il a fallu pousser les développements limités à l'ordre 2, les termes d'ordre 1 se simplifiant lors de l'addition des deux expressions.

On applique une tension sinusoïdale $u_0(t) = U \cos(\omega t)$ à l'entrée de la ligne, et on se place en régime sinusoïdal forcé. On considère une solution en onde progressive harmonique de la forme

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x, t) = \underline{I} e^{j(\omega t - kx)}$$

pour l'onde de tension et l'onde de courant se propageant le long de la ligne.

3. Dans la limite continue, on a

$$u_{n-1}(t) = u(x - a, t) = u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial t} = u_n(t) - a \frac{\partial u}{\partial t}$$

et la relation courant tension pour la bobine considérée devient

$$-a \frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Avec l'onde harmonique progressive considérée, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk \underline{u}(x, t),$$

d'où

$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial t} = \frac{jka}{L} \underline{u}.$$

On en déduit

$$\underline{i} = \frac{jka}{j\omega L} \underline{u} = \frac{ka}{\omega L} \underline{u}.$$

La relation de dispersion s'écrit $\omega = kv$, d'où

$$\underline{i} = \frac{a}{Lv} \underline{u} = \frac{1}{\omega_0 L} \underline{u} = \frac{\sqrt{LC}}{L} \underline{u}.$$

On a donc $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ avec

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La grandeur \underline{Z} a la dimension d'une impédance; son module s'exprime en ohm.

Si on considère deux ondes de tension et de courant progressives vers les x décroissants, on a par un calcul similaire

$$\underline{u} = -\underline{Z} \underline{i}.$$

La ligne est en réalité de taille finie et est constituée de 16 cellules LC . On s'intéresse ici à la propagation d'un train d'impulsions périodiques de tension le long de la ligne.

4. On a vu que \sqrt{LC} est homogène à un temps (question 1). On pose donc $\tau \approx \sqrt{LC}$.

Entre l'entrée et la sortie de la ligne, le temps de propagation est de l'ordre de $T = 16\tau$ soit $T = 0,10 \text{ ms}$.

Si on ne veut pas que les impulsions se recouvrent, il faut qu'une impulsion ait fait un aller-retour sur la ligne avant d'envoyer l'impulsion suivante; la durée entre deux impulsions successives doit donc être inférieure à $2T$, soit une fréquence

$$f < \frac{1}{16\tau} = 5 \text{ kHz}.$$

5. Extrémité en circuit ouvert

En u_0 , on observe l'impulsion $u(t)$ envoyée par le générateur. En sortie ouverte, on a $r_u = 1$: l'onde réfléchie a même amplitude que l'onde incidente. On observe donc en u_{16} la superposition des ondes incidente et réfléchie, soit $2u(t)$.

Extrémité en court-circuit

On impose $u_{16} = 0$ à la sortie en court-circuit.

6. Il n'y a pas de signal réfléchi si l'onde incidente vérifie la condition à la limite, soit $u_{16}(t) = Zi_{16}(t)$.

Comme la résistance impose $u_{16}(t) = Ri_{16}(t)$, c'est le cas si $R = Z$, impédance caractéristique de la ligne.

On calcule $R = 50 \Omega$.

► Le GBF ayant une impédance de 50Ω égale à Z , il n'y a pas réflexion au niveau du GBF. Quand $R \neq Z$, l'onde incidente se réfléchit en bout de ligne, mais l'onde réfléchie ne se réfléchit ensuite pas au niveau du GBF. Elle ne fait donc pas d'allers-retours avec des réflexions successives entre les deux extrémités.

~~~~~ L'équation de d'Alembert dans d'autres situations ~~~~~

12 — Chaîne d'atomes

1. La masse (n) est soumise d'une part à l'action du ressort « de droite ». Sa longueur étant :

$$\begin{aligned} L_d &= x_{n+1}(t) - x_n(t) = x_{n+1}^0 + \xi_{n+1}(t) - x_n^0 - \xi_n(t) \\ &= a + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t) \end{aligned}$$

cette action vaut

$$\vec{T}_d = k[L_d - a] \vec{e}_x = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] \vec{e}_x.$$

La même masse est soumise d'autre part à l'action du ressort « de gauche », de longueur :

$$\begin{aligned} L_g &= x_n(t) - x_{n-1}(t) = x_n^0 + \xi_n(t) - x_{n-1}^0 - \xi_{n-1}(t) \\ &= a + \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Cette action vaut donc

$$\vec{T}_g = -k[L_g - a] \vec{e}_x = -k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] \vec{e}_x.$$

L'accélération de la masse (n) étant

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{u}_x = \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} \vec{u}_x,$$

appliquons à celle-ci le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)].$$

2. Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de x_0^n permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(t) &= \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \xi_n(t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_{n-1}(t) &= \xi(x_n^0 - a, t) = \xi(x_n^0, t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \xi_n(t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

À l'ordre le plus bas non nul, il reste

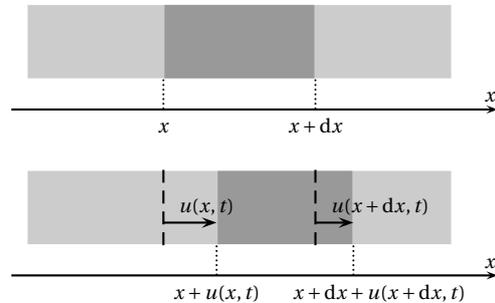
$$k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.}$$

13 — Onde sur une barre

On considère la tranche comprise au repos entre les abscisses x et $x + dx$, de masse $dm = \rho S dx$. En présence de l'onde, elle se trouve située entre les abscisses $x + u(x, t)$ et $x + dx + u(x + dx, t)$.



L'allongement de la tranche considérée est

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx.$$

Sa longueur au repos étant dx , son allongement relatif est

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

À une force de traction $F > 0$ correspond un allongement relatif $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$; la force de traction s'écrit alors :

$$dF(x, t) = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

La tranche comprise entre x et $x + dx$ est soumise à :

$$dF(x + dx, t) - dF(x, t) = \frac{\partial dF}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

L'abscisse du centre de gravité de la tranche est

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{[x + dx + u(x, t)] + [x + u(x, t)]}{2} \\ &= x + \frac{dx}{2} + \frac{u(x, t) + u(x + dx, t)}{2} \\ &= x + \frac{dx}{2} + u(x, t) \end{aligned}$$

au premier ordre.

Son accélération vaut donc $\ddot{x}_G = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ et le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tranche considérée s'écrit :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

soit :

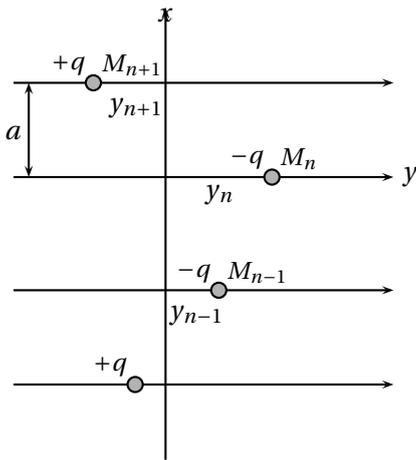
$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0.}$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert, dont la solution peut s'écrire $u(x, t) = Af(c - xt) + Bg(x + ct)$, la célérité des ondes progressives étant donnée par

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

14 — Boules chargées — oral ENS...

Dans un premier temps, il faut paramétrer le système pour décrire les mouvement des boules :



On repère par $y_n(t)$ la position horizontale de la boule de rang n à l'instant t .

Sur la figure, on a $y_{n-1}(t) < 0$, $y_n(t) > 0$ et $y_{n+1}(t) > 0$.

1^{er} cas : chaque boule n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisins

La boule en M_n subit de la part de la boule en M_{n+1} la force électrostatique

$$\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_{n+1}M_n}}{(M_{n+1}M_n)^3},$$

et de la part de la boule en M_{n-1} la force

$$\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_{n-1}M_n}}{(M_{n-1}M_n)^3},$$

En notant \vec{R} la réaction du fil sur la boule de rang n (normale à \vec{e}_x en considérant qu'il n'y a pas de frottement) et m sa masse, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{e}_x = \vec{F}_{n+1 \rightarrow n} + \vec{F}_{n-1 \rightarrow n} + \vec{R}.$$

En projetant selon \vec{e}_x , on obtient

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_n - y_{n+1}}{(M_{n+1}M_n)^3} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_n - y_{n-1}}{(M_{n-1}M_n)^3}$$

Afin de simplifier l'étude, nous allons envisager des mouvements de faible amplitude, soit $|x_n| \ll a$. On a alors

$$M_{n+1}M_n \approx a \quad \text{et} \quad M_{n-1}M_n \approx a$$

et l'équation du mouvement devient

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} [y_n(t) - y_{n+1}(t) + y_n(t) - y_{n-1}(t)]$$

soit

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} [2y_n(t) - y_{n+1}(t) - y_{n-1}(t)].$$

Nous allons considérer que la longueur d'onde λ du phénomène est grande devant a , ce qui fait que y_n varie faiblement entre deux boules voisines.

Cela permet de passer à la limite continue, en introduisant une fonction $y(x, t)$, de classe \mathcal{C}^2 , qui coïncide avec $y_n(t)$ pour $x = na$.

En développant à l'ordre deux, on a

$$y(x + a, t) = y(x, t) + a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

soit en $x = na$

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

De même

$$y(x - a, t) = y(x, t) - a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

soit en $x = na$

$$y_{n-1}(t) = y_n(t) - a \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On en déduit

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) = 2y_n(t) + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left[-a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]$$

soit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a}}.$$

2^e cas : chaque boule n'interagit avec toutes les autres

Compte tenu de l'alternance des signes des charges, on a

$$\vec{F}_{n+2 \rightarrow n} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_{n+2}M_n}}{(M_{n+2}M_n)^3}.$$

On peut généraliser pour une boule de rang $n + p$:

$$\vec{F}_{n+p \rightarrow n} = (-1)^p \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_{n+p}M_n}}{(M_{n+p}M_n)^3}.$$

Dans le cas de mouvements de faible amplitude, on a $M_{n+p}M_n \approx pa$; la projection de la force précédente selon \vec{e}_x s'écrit

$$F_{x,n+p \rightarrow n} = (-1)^p \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 p^3} (y_n - y_{n+p}).$$

La résultante des forces subie par la boule n selon \vec{e}_x s'écrit alors

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{p=1}^{\infty} F_{x,n+p \rightarrow n} + F_{x,n-p \rightarrow n} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{2y_n - y_{n+p} - y_{n-p}}{p^3}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut développer

$$y(x+ap, t) = y(x, t) + ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit en $x = na$

$$y_{n+p}(t) = y_n(t) + ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

De même

$$y(x-ap, t) = y(x, t) - ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit en $x = na$

$$y_{n-p}(t) = y_n(t) - ap \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2 p^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$y_{n+p}(t) + y_{n-p}(t) = 2y_n(t) + a^2 p^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{a^2 p^2}{p^3} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &= (-1) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \end{aligned}$$

On reconnaît la série harmonique alternée

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln 2,$$

d'où

$$F_x = \frac{q^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Le principe de la dynamique appliqué à la boule de rang n s'écrit

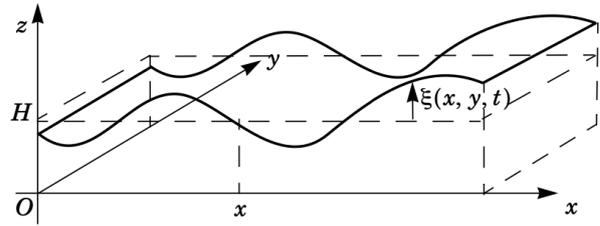
$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient l'équation de d'Alembert avec une célérité différente du cas précédent :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c'^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c' = \frac{c \ln 2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a}} = c \ln 2.$$

15 — Ondes de gravité en eau peu profonde

Représentons la situation schématiquement :



On considère un bassin de largeur L selon Oy , de profondeur moyenne H selon Oz et de longueur infinie selon Ox , rempli d'eau. Le bassin est le siège de vagues (ondes de gravité) caractérisées par un champ de vitesse $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$ et un champ de pression $P(x, z, t)$. À l'instant t et à l'abscisse x , la hauteur d'eau est notée

$$h(x, t) = H + \zeta(x, t) \quad \text{où} \quad |\zeta(x, t)| \ll H.$$

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide de volume $d\tau$ s'écrit

$$\mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau + \mu d\tau \vec{g}$$

soit

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g}.$$

Le terme de dérivée convective étant du deuxième ordre en $v(x, t)$, on peut le négliger, d'où

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g}.$$

2. Projetons la relation précédente selon Ox :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad \text{(PV)}$$

Projetons l'équation précédente selon Oz :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g.$$

Intégrons par rapport à z :

$$P(x, z, t) = -\mu g z + C(x, t)$$

où la « constante d'intégration » est constante par rapport à la variable d'intégration z , c'est-à-dire est *a priori* une fonction de x et de t .

Écrivons la pression à la surface libre, le cote $z = H + \zeta(x, t)$:

$$P_0 = -\mu g [H + \zeta(x, t)] + C(x, t).$$

On a donc $C(x, t) = P_0 + \mu g [H + \zeta(x, t)]$, d'où

$$P(x, z, t) = P_0 + \mu g [H + \zeta(x, t) - z]. \quad \text{(PZ)}$$

3. Dérivons (PZ) par rapport à x :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

L'équation (PV) s'écrit alors

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu g \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

d'où l'équation de couplage demandée;

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}}. \quad (1)$$

4. La tranche d'eau entre x et $x + dx$ a pour hauteur $H + \zeta(x, t)$, et donc pour volume

$$d\tau = (H + \zeta(x, t))L dx.$$

Sa masse est donc

$$\delta m_x(t) = \mu L [H + \zeta(x, t)] dx.$$

Le bilan de masse entre t et $t + dt$ s'écrit

$$d(\delta m) = \delta m_{\text{reçu}}.$$

La variation est

$$\begin{aligned} d(\delta m) &= \delta m_x(t + dt) - \delta m_x(t) \\ &= \mu L [\zeta(x, t + dt) - \zeta(x, t)] dx = \mu L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt dx. \end{aligned}$$

Le terme de masse reçue se calcule à partir du débit massique en fluide à travers la section en x et du débit massique sortant à travers la section en $x + dx$:

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçu}} &= \mu v(x, t) L [H + \zeta(x, t)] dt \\ &\quad - \mu v(x + dx, t) L [H + \zeta(x + dx, t)] dt. \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre, les termes $v(x, t)\zeta(x, t)$ (et en $x + dx$), d'ordre deux, ne sont pas pris en compte; il reste

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçu}} &= \mu v(x, t) LH dt - \mu v(x + dx, t) LH dt \\ &= -\mu \frac{\partial v}{\partial x} LH dt dx, dt. \end{aligned}$$

Le bilan de masse s'écrit alors

$$\mu L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx, dt = -\mu \frac{\partial v}{\partial x} LH dx dt$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial v}{\partial x}}. \quad (2)$$

5. Dérivons (2) par rapport à t :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -H \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = gH \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

en utilisant (2).

La surélévation $\zeta(x, t)$ vérifie donc l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{gH}}.$$

6. Quand les vagues s'approchent du rivage, leur vitesse c diminue car la profondeur H diminue vers le rivage.

Quand une vague est en biais par rapport au rivage, sa partie la plus éloignée va plus vite que sa partie plus proche (car le fond H est plus grand quand on est plus loin du rivage); elle tend donc à la rattraper, et la vague arrive parallèlement au rivage.

7. La vitesse d'une vague de la vague varie comme \sqrt{H} où H est la profondeur de l'eau. Cette dernière étant plus élevée au sommet de la vague, ce sommet se déplace plus vite que la base de la vague, ce qui entraîne un déferlement.