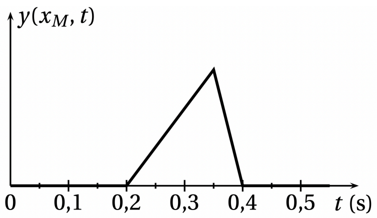
TD de physique des ondes n° 0 — Solutions

✧ Ondes mécaniques

2 — Onde progressive

L'onde doit parcourir $10-6=4$ cm pour atteindre le point M ; à la célérité $c=20\,\text{cm}^2$, elle atteindra donc ce point à l'instant $t_1=\dfrac{4}{20}=0{,}2$ s.
Le maximum doit parcourir $10-7=7$ cm pour atteindre le point M à l'instant $t_2=\dfrac{7}{20}=0{,}35$ s.
La « fin » de l'onde doit parcourir $10-2=8$ cm pour atteindre le point M à l'instant $t_3=\dfrac{8}{20}=0{,}4$ s.
On peut donner la représentation temporelle de l'onde au point M :



3 — Onde le long d'une corde — oral Mines

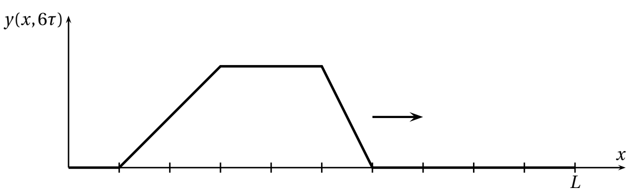
On a une onde progressive dans le sens des x croissants, à la célérité $c=\dfrac{L}{10\tau}$.

— Sur $0\leqslant t\leqslant\tau$, l'élongation croît régulièrement de 0 à a, pendant que l'onde se propage sur une distante $\tau c=0{,}1L$.

— Sur $\tau\leqslant t\leqslant 3\tau$, l'élongation reste constant, égale à a, pendant que l'onde se propage sur une distante $2\tau c=0{,}2L$.

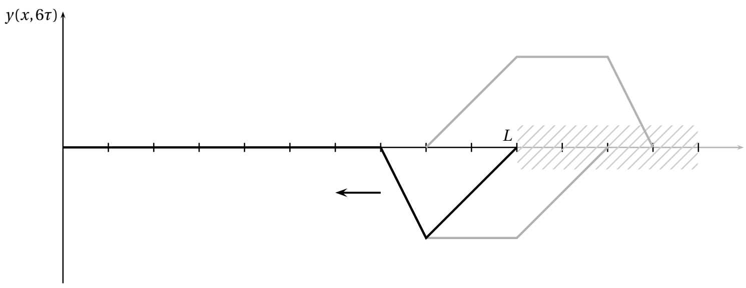
— Sur $3\tau\leqslant t\leqslant 5\tau$, l'élongation décroît régulièrement de a à 0, pendant que l'onde se propage sur une distante $2\tau c=0{,}2L$.

À l'instant 6τ, l'onde s'est propagée sur une distance $\dfrac{6L}{10}<L$; elle n'a donc pas atteint l'extrémité de la corde.
On peut représenter le profil de la corde à cette date :



L'onde atteint l'extrémité de la corde au bout d'une durée 10τ.

L'extrémité de la corde étant fixe, l'onde progressive proposée ne peut pas satisfaire à la condition aux limites $y(L,t)=0$, $\forall t$. Il y a alors nécessairement une onde réfléchie, l'onde totale sur la corde étant donnée par la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Cette somme devant être toujours nulle en $x=L$, on en déduit que la réflexion se fait avec une inversion de signe de l'amplitude. L'onde réfléchie est donc opposé à l'onde incidente, et se propage dans le sens des x décroissants avec la même célérité.
À l'instant 13τ, on représente l'onde incidente (son front avant serait à l'abscisse 13τ), et l'onde réfléchie qui s'est propagée sur la distance $\frac{3L}{10}$ (on représente la partie en $x>L$ pour mieux comprendre, mais elle n'a aucune réalité physique !).
On effectue ensuite la somme algébrique des deux ondes.



Complément

On peut mettre le problème en équation, ce qui permet de programmer la solution informatiquement.
L'excitation crée une onde incidente progressive dans le sens des x croissants, de la forme

$$y_\text{i}(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

L'extrémité fixée impose $y(L,t)=0$, $\forall t$, soit $f(t-L/c)=0$ quel que soit t, ce qui ne peut être vérifié avec une onde incidente seule. Il existe donc nécessairement une onde réfléchie, progressive dans le sens des x décroissants, de la forme

$$y_\text{r}(x,t)=g\left(t+\frac{x}{c}\right).$$

L'onde totale sur la corde est

$$y(x,t)=y_\text{i}(x,t)+y_\text{r}(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g\left(t+\frac{x}{c}\right),$$

et la condition $y(L,t)=0$ conduit à

$$y_\text{r}(L,t)=-y_\text{i}(L,t).$$

La réflexion s'accompagne d'un changement de signe de l'amplitude (le coefficient de réflexion vaut -1). On peut préciser les choses en exprimant l'onde réfléchie en fonction de l'onde incidente :

$$\begin{aligned} g\left(t+\frac{x}{c}\right) &= g\left(t+\frac{x-L+L}{c}\right) = g\left(t+\frac{x-L}{c}+\frac{L}{c}\right) \\ &= y_{\mathrm{r}}\left(L, t-\frac{L-x}{c}\right) = -y_{\mathrm{i}}\left(L, t+\frac{x-L}{c}\right) \\ &= -f\left(t-\frac{L-x}{c}-\frac{L}{c}\right) = -f\left(t-\frac{2L-x}{c}\right). \end{aligned}$$

Finalement l'onde sur la corde s'écrit

$$y(x,t) = f\left(t-\frac{x}{c}\right) - f\left(t-\frac{2L-x}{c}\right),$$

avec

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < 0 \\ \frac{a}{\tau} u & \text{pour } 0 \leqslant u < \tau \\ a & \text{pour } \tau \leqslant u < 3\tau \\ -\frac{a}{2\tau} u & \text{pour } 3\tau \leqslant u < 5\tau \\ 0 & \text{pour } u > 5\tau \end{cases}$$

4 — Corde de Melde d'après un QCM de l'Enac

On excite une corde de Melde (longueur L, masse linéique μ, tension T) fixée à ses deux extrémités. On admettra que les déplacements de l'extrémité attachée au vibreur sont suffisamment faibles pour la supposer fixe.

1. Observe-t-on des ondes stationnaires pour n'importe quelle fréquence ?

2. Quelles sont les affirmations exactes pour l'ondes stationnaire d'ordre n, ou mode propre n ?

A) on a n ventres et n nœuds

B) On a n ventres et $n+1$ nœuds

C) On a $n-1$ ventres et n nœuds

D) On a $n+1$ ventres et n nœuds

3. Donner la relation entre la longueur L de la corde et la longueur d'onde λ_n du mode propre n.

4. Quelle est l'expression de la célérité c de propagation d'une onde le long de la corde ? Calculer c pour une corde dont la masse vaut 10 g et la tension $T = 100$ N.

A) $c = (T/\mu)^{1/2}$

B) $c = (\mu/T)^{1/2}$

5. Quelle est la fréquence ν_n du mode propre n ? Calculer ν_1.

A) $\nu_n = nc/(2L)$

B) $\nu_n = n2L/c$

6. On souhaite modifier la longueur de la corde de telle sorte que ν_1 acquière une valeur double, la tension demeurant inchangée. Quel doit être le rapport entre la nouvelle longueur L' de la corde et l'ancienne longueur L ?

A) $L'/L = 1/2$

B) $L'/L = 2$

C) $L'/L = 1/4$

D) $L'/L = \sqrt{2}$

5 — Ondes progressives — Enac 2018

Une onde progressive sinusoïdale se propage selon la direction définie par un axe Ox ; en fonction de la coordonnée cartésienne x et du temps t, la fonction d'onde s'écrit

$$\psi(x,t) = \psi_{\mathrm{m}} \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right],$$

où ψ_{m} est l'amplitude de l'onde, ω la pulsation de l'onde et v une grandeur dont la nature sera demandée ultérieurement.

1. Quelle est la relation entre la fréquence ν de cette onde et sa pulsation ω ?

A) $\nu = 2\pi\omega$

B) $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$

C) $\nu = \dfrac{2\pi}{\omega}$

D) $\nu = \dfrac{\omega}{\pi}$

2. Que re présente physiquement v et quelle est son unité SI (système international des unités) ? En déduire la signification physique du terme x/v.

A) v est une durée dont l'unité SI est la seconde ; x/v représente donc une vitesse.

B) v est la vitesse de propagation (ou célérité) de l'onde et son unité SI est le mètre par seconde ; x/v est le retard (temporel) dû à la propagation.

C) v est une position et son unité SI est le mètre ; x/v est donc un nombre sans dimension.

D) v est la vitesse de propagation (ou célérité) de l'onde et son unité SI est le mètre par seconde ; x/v n'a pas de signification particulière.

3. Comment peut s'écrire la fonction d'onde $\psi_{\mathrm{r}}(x,t)$ d'une onde qui se propage selon les x décroissants ?

A) $\psi_{\mathrm{r}}(x,t) = \psi_{\mathrm{m}} \cos\left[\omega\left(-t-\frac{x}{v}\right)\right]$

B) $\psi_{\mathrm{r}}(x,t) = \psi_{\mathrm{m}} \cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\right]$

C) $\psi_{\mathrm{r}}(x,t) = \psi_{\mathrm{m}} \cos\left[\omega\left(-t+\frac{x}{v}\right)\right]$

D) $\psi_{\mathrm{r}}(x,t) = \psi_{\mathrm{m}} \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$

4. Donner la relation entre la longueur d'onde λ, la fréquence ν et la vitesse de propagation v de l'onde.

A) $\lambda\nu = v$

B) $\dfrac{\lambda}{\nu} = v$

C) $\dfrac{\nu}{\lambda} = v$

D) Ces trois grandeurs ne sont pas reliées entre elles.

6 — Corde de Melde

1. Rappeler le dispositif de la corde de Melde.

2. Les paramètres relatifs au problème sont la tension T de la corde, le champ de pesanteur g et la masse linéique μ de la corde. On cherche à construire une grandeur homogène à une vitesse, selon une loi de la forme $c = KT^{\alpha}\mu^{\beta}g^{\gamma}$, où K est un nombre sans dimension. Par analyse dimensionnelle, déterminer les exposants α, β et γ.
Une résolution analytique conduit à $K = 1$.

3. On observe un phénomène de résonance à une fréquence de 15 Hz pour deux fuseaux et de 23 Hz pour trois fuseaux. Ces valeurs sont-elles compatibles? Quelles seraient les fréquences suivantes?

4. La longueur de la corde est $L = 80$ cm. Quelle est la célérité des ondes?

5. La masse suspendue est $m = 50$ g. Quelle est la tension de la corde? En déduire la valeur de sa masse linéique.

7 — Corde pleine, corde filée

1. Mode fondamental : un fuseau, avec $L = \dfrac{\lambda_1}{2}$.

On a $\lambda_1 = \dfrac{c}{f_1}$, d'où $f_1 = \dfrac{c}{2L} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

Harmonique de rang n : n fuseaux, avec $L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$.

On a $\lambda_n = \dfrac{c}{f_n}$, d'où $f_n = \dfrac{nc}{2L} = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.
On a $f_n = nf_1$.

2.a) Un milieu tel que la célérité dépende de la fréquence est dit **dispersif**.

2.b) On a toujours n fuseaux pour le mode de rang n, soit

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}.$$

Comme $\lambda_n = c_n/f'_n$, la fréquence du mode n est

$$f'_n = \frac{c_n}{\lambda_n} = \frac{nc_n}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\sqrt{1+Bf_n^2}.$$

En prenant au premier l'ordre l'expression de la fréquence du mode propre de rang n dans l'expression de la célérité, soit $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, on obtient

$$f'_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\sqrt{1+B\frac{n^2}{4L^2}\frac{T}{\mu}}.$$

On remarque que l'on peut écrire

$$f'_n = f_n\sqrt{\frac{T}{\mu}}\sqrt{1+B\frac{n^2}{4L^2}\frac{T}{\mu}}.$$

Le terme dû à la raideur étant faible, on peut linéariser l'expression :

$$\boxed{f'_n = f_n\left[1+n^2\frac{BT}{4L^2\mu}\right]}.$$

2.c) On n'a plus $f'_n = nf_1$. Les sons produits ne sont pas agréables à l'oreille car leur timbre n'est pas constitué par les harmoniques naturels. Le timbre fait que la corde « sonne faux ».

2.d) On a

$$f'_n = f_n\left[1+n^2\frac{\pi^3Ed^4}{64L^2}\right].$$

On définit l'intervalle en savarts entre deux sons de fréquences f_1 et f_2 par $i_s = 1000\log\dfrac{f_2}{f_1}$. Une oreille exercée peu distinguer un intervalle de 2 savarts.

Exprimer l'intervalle i_s entre le partiel de rang n et l'harmonique de même rang en fonction de n et de B.

2.e) Une guitare possède six cordes; lorsqu'on les excite « à vide » (elles vibrent sur toute leur longueur), elles émettent les notes mi_1 (82 Hz), la_1 (110 Hz), $ré_2$ (147 Hz), sol_2 (196 Hz), si_2 (247 Hz) et mi_3 (330 Hz).

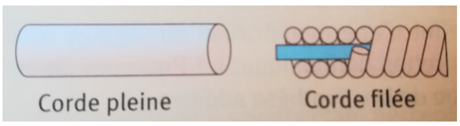
On considère des cordes en nylon de longueur $L = 65$ cm, de module de Young $E = 1{,}5\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^{-2}}$ sous une tension $T = 80$ N.

On donne le diamètre des cordes suivantes : $d = 0{,}71$ mm pour mi_3, $d = 1{,}19$ mm pour sol_2 et $d = 2{,}85$ mm pour mi_1.

Sachant que l'amplitude des partiels diminue avec leur rang et que la zone de sensibilité maximale de l'oreille est [500 Hz; 5000 Hz], peut-on utiliser ces trois cordes en nylon pour une guitare?

2.f) Comment faut-il modifier E pour résoudre ce problème?

On peut utiliser des cordes pleines ou des cordes filées, ces dernières étant constituées d'une âme très fine autour de laquelle on enroule le matériau formant la corde.



Le module d'Young caractérisant la raideur de la corde, pour quel type de corde l'écart entre f'_n et f_n sera-t-il le plus faible?

Dans une guitare, utilise-t-on des cordes filées pour les cordes graves ou pour les cordes aiguës?

8 — Du plomb ou de l'or ?

1. Effectuer l'analyse dimensionnelle... On retrouve $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

2. Dans la 1re expérience, la tension de la corde est $T = mg = \rho V g$ en notant ρ la masse volumique de la boule et V son volume. On obtient ce résultat en écrivant que la somme des forces appliquées la boule est nulle à l'équilibre : elle est soumise à son poids et à la tension de la corde.

On observe deux fuseaux, donc la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{c}{f}$ vaut $\lambda = L$, soit

$$L = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{\rho V g}{\mu}}.?$$

Dans la 2e expérience, la boule est soumise à la tension de la corde, à son poids, et à la poussée d'Archimède (résultante des forces de pression de fluide).

On en déduit la tension de la corde est $T = mp - \Pi_a$ où $\Pi_a = \rho_e V g$ est la poussée d'Archimède, en notant ρ_e la masse volumique de l'eau.

On observe 4 fuseaux, donc $L = 2\lambda'$, d'où la longueur d'onde

$$\lambda' = \frac{L}{2} = \frac{1}{f'}\sqrt{\frac{(\rho-\rho_e)Vg}{\mu}}.$$

On en déduit

$$4 = \frac{f'^2}{f^2}\frac{\rho}{\rho-\rho_e}$$

soit

$$(4f^2 - f'^2)\rho = 4f^2\rho_e.$$

On a donc

$$\rho = \frac{4f^2}{4f^2 - f'^2}\rho_e.$$

On calcule $\rho = 10{,}3\rho_e = 10{,}3 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

La boule est — hélas — en plomb !

✧ Introduction au monde quantique

9 — Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans $x = 0$ et $x = L$ dans un puits infini. On admet que sa fonction d'onde est de la forme

$$\psi(x,t) = A\sin(kx)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

où A, k et ω sont des constantes réelles positives.

1. Déterminer les valeurs possibles de k en fonction de L et d'un entier positif n quelconque.

2. La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[x, x+\mathrm{d}x]$ est $|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$. Justifier la condition de normalisation suivante :

$$\int_0^L |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1.$$

L'utiliser pour trouver l'expression de A en fonction de L.

3. Tracer $|\psi(x,t)|^2$ en fonction de x dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Commenter.

10 — Particule dans un puits de potentiel

— oral CCP MP 2018

On considère une particule de masse m et d'énergie E dans un puits de potentiel tel que l'énergie potentielle $V(x)$ est nulle pour $0 < x < L$ et infinie ailleurs. La probabilité de présence de la particule entre x et $x+\mathrm{d}x$ est proportionnelle au temps $\mathrm{d}t$ que met la particule à traverser cette zone.

1. On adopte une description classique.

1.a) En utilisant la conservation de l'énergie, calculer la vitesse $v(x)$ de la particule dans le puits.

1.b) On note $P(x)$ la densité de probabilité de la particule. Montrer qu'après normalisation on a $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{L}$.

1.c) Calculer la probabilité de trouver la particule entre 0 et $\dfrac{L}{4}$. Commenter.

2. On adopte une description quantique. La fonction d'onde de la particule est

$$\psi_n(x,t) = A_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\exp\left(-ic\frac{E}{\hbar}t\right),$$

où n est un entier.

2.a) Calculer A_n.

2.b) Calculer la probabilité de présence de la particule entre 0 et $\dfrac{L}{4}$. Commenter.

2.c) Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

11 — Énergie minimale de confinement

1. Rappeler l'inégalité de Heisenberg. Que signifie-t-elle ?

2. Un quanton est confiné dans un domaine de longueur L_x selon Ox.

Montrer que son énergie cinétique est minorée par une énergie minimale, dite de confinement, dont donnera l'expression en fonction de m, L_x et $\hbar$.