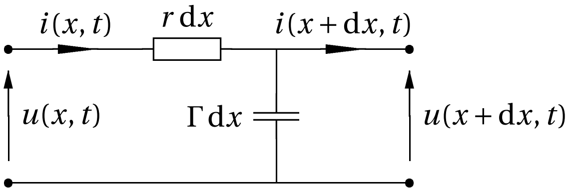
Complément TP de physique n° 10 — Étude théorique d'une ligne *RC*

1 — Modèle de la ligne à constantes réparties

Modèle électrique :



1. On a

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=\Gamma\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial u}{\partial x}=r\,i(x,t)\,,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{r\Gamma}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}\,. \tag{1}$$

On obtient une **équation de la diffusion**.

2. On cherche une solution de la forme $\underline{u}(x,t)=\underline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. L'équation (1) donne alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{F}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{j}\omega r\Gamma\underline{F}(x)\,.$$

La solution générale est de la forme

$$\underline{F}(x)=\underline{A}\,\mathrm{e}^{\underline{\beta}x}+\underline{B}\,\mathrm{e}^{-\underline{\beta}x}$$

où β vérifie

$$\underline{\beta}^2=\mathrm{i}\omega r\Gamma=\omega r\Gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,,$$

soit

$$\underline{\beta}=(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega r\Gamma}{2}}=\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}$$

en posant

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega r\Gamma}}\,.$$

On a donc

$$\underline{F}(x)=\underline{A}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{\delta}}+\underline{B}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{\delta}}\,.$$

La ligne étant semi-infinie ($x>0$), on doit avoir $\underline{A}=0$ pour que le tension ne diverge pas quand $x\to+\infty$ (terme $\underline{A}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{\delta}}$).

La condition à l'origine s'écrit alors

$$\underline{u}(0,t)=U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

d'où $\underline{B}=U_0$, soit

$$\boxed{\underline{F}(x)=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{\delta}}}\,.$$

avec

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi r\Gamma f}}\,.$$

3. On a

$$\underline{u}(x,t)=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)}=U(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)}\,,$$

d'où

$$U(x)=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi r\Gamma f}}}\,.$$

Le retard de phase vaut $\boxed{\varphi(x)=\frac{x}{\delta}=x\sqrt{\pi r\Gamma f}}$.

En prenant la partie réelle de $\underline{u}(x,t)$, on obtient

$$\boxed{u(x,t)=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(2\pi f t-\frac{x}{\delta}\right)}\,.$$

4. L'amplitude décroît exponentiellement avec une distance caractéristique $\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi r\Gamma f}}$.

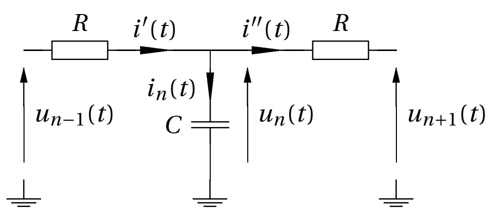
La distance δ diminue quand la fréquence f augmente, comme le confirment les résultats expérimentaux.

Quand la distance f devient élevée, δ devient très faible : c'est l'**effet de peau**.

2 — Modèle de la ligne à constantes localisées

2.1 Mise en équation

5. Considérons la cellule de rang n :



On a

$$i_n(t)=C\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

D'autre part

$$i'(t)=\frac{u_{n-1}(t)-u_n(t)}{R} \quad \text{et} \quad i''(t)=\frac{u_n(t)-u_{n+1}(t)}{R}\,.$$

Comme $i_n(t) = i'(t) - i''(t)$, on obtient

$$\boxed{RC\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} = u_{n-1}(t) + u_{n+1}(t) - 2u_n(t)}\,. \qquad (2)$$

2.2 Passage à la limite de la ligne continue

6. En développant au second ordre

$$u(x+a,t) = u(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et

$$u(x-a,t) = u(x,t) - a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

d'où

$$u_{n+1}(t) - u_n(t) + u_{n-1}(t) - u_n(t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et l'équation discrète (2) s'écrit

$$RC\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

soit

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{a}{R}\frac{a}{C}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{r\Gamma}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

On retrouve le modèle de la ligne continue avec

$$\boxed{r = \frac{R}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Gamma = \frac{C}{a}}\,.$$

7. On a établi dans le modèle continu

$$u(x,t) = U_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos\left(2\pi f t\frac{x}{\delta}\right).$$

En considérant les points $x_n = n_a$, on a

$$u_n(t) = u(na,t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{na}{\delta}}\cos\left(2\pi f t - \frac{na}{\delta}\right)$$

que l'on peut écrire

$$\boxed{u_n(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0}\cos\left(2\pi f t - \frac{n}{n_0}\right)}\,, \qquad (3)$$

avec

$$n_0 = \frac{\delta}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\pi r\Gamma f}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a r a\Gamma f}}.$$

Comme $R = ra$ et $C = \Gamma a$, on a

$$\boxed{n_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi RCf}}}\,.$$

2.3 Validité du passage à la ligne continue

8. Le terme $\cos\left(2\pi f t - \frac{x}{\delta}\right)$ de l'expression de $u(x,t)$ correspond à une onde progressive harmonique, se propageant dans le sens des x croissants; on peut l'écrire

$$\cos\left(2\pi f t - \frac{x}{\delta}\right) = \cos\left[2\pi\left(f t - \frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

La longueur d'onde s'écrit donc $\boxed{\lambda = 2\pi\delta}$.
Le passage au milieu continu est valide si la variation spatiale de l'onde est faible à l'échelle d'une cellule, c'est-à-dire si $\boxed{a \ll \lambda}$. Il faut donc

$$a \ll \frac{2\pi}{\sqrt{\pi r\Gamma f}} = \sqrt{\frac{4\pi}{r\Gamma f}},$$

soit

$$a^2 r\Gamma f \ll 4\pi.$$

En remarquant que $a^2 r\Gamma = RC$, on en déduit le critère

$$\boxed{RCf \ll 4\pi}\,.$$

➤ En terme de pulsation, ce critère peut s'écrire en ordre de grandeur $\boxed{RC\omega \ll 1}$.

9. Le passage à la limite continue est valide si $f \ll \frac{4\pi}{RC}$.
Avec $R = 1{,}5\ \mathrm{k\Omega}$ et $C = 100$ nF, on a $\frac{4\pi}{RC} = 84$ kHz.
En se limitant à des fréquences inférieures à 1 kHz comme on l'a fait expérimentalement, le passage à la limite continue est tout à fait justifié.

2.4 Validité du modèle de la ligne semi-infinie

10. Si la ligne est de longueur finie, il se produit une réflexion de l'onde de tension à son extrémité; on observe alors la superposition d'une onde incidente (se propage selon les x croissants) et d'une onde réfléchie (se propage selon les x décroissants), de la forme

$$u(x,t) = U_\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(2\pi f t - \frac{x}{\delta} + \psi_1\right) + U_\mathrm{r}\,\mathrm{e}^{+\frac{x}{\delta}}\cos\left(2\pi f t + \frac{x}{\delta} + \psi_2\right).$$

11. L'amplitude de l'onde incidente varie comme $U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0}$. On peut négliger cette amplitude en fin de ligne si $U_N = U_0\,\mathrm{e}^{-N/n_0} < \frac{U_0}{100}$, soit si $-N < -\ln(100)\,n_0$; ce qui revient à $N > n_0\ln(100)$. Il faut donc

$$\boxed{N > N_\mathrm{min}} \quad \text{avec} \quad \boxed{N_\mathrm{min} = 4{,}6 n_0}\,.$$

12. Calculons N_min à partir des valeurs de n_0 déterminées expérimentalement.

f (Hz)	400	500,5	550	600,4	700,3	800	900	1000,8
N_min	10,1	9,0	8,6	8,3	7,6	7,1	6,6	6,3

On peut considérer notre ligne de 30 cellules comme une ligne infinie.

2.5 Étude directe de ligne à constantes réparties (d'après un écrit de Centrale PC)

On part de l'équation de récurrence établie à la question 5.

13. On cherche une solution de la forme

$$\underline{u}_n(t) = \underline{k}^n \underline{U}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

à l'équation

$$RC\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} = u_{n-1}(t) + u_{n+1}(t) - 2u_n(t).$$

$$\mathrm{j}\omega RC\underline{k}^n\underline{u}_0 = \underline{k}^{n+1}\underline{u}_0 + \underline{k}^{n-1}\underline{u}_0 - 2\underline{k}^n\underline{u}_0$$

soit

$$\mathrm{j}\omega RC = \underline{k} + \frac{1}{\underline{k}} - 2.$$

La constante $\underline{k}$ doit vérifier l'équation du second degré

$$\boxed{\underline{k}^2 - (2+\mathrm{j}RC\omega)\underline{k} + 1 = 0}\,.$$

14. En posant $X = RC\omega \ll 1$, l'équation précédente s'écrit

$$\underline{k}^2 - 2\left(1+\mathrm{j}\frac{X}{2}\right)\underline{k} + 1 = 0 \quad \text{avec} \quad X = RC\omega. \qquad (4)$$

Le discriminant réduit s'écrit

$$\Delta' = \left(1+\mathrm{j}\frac{X}{2}\right) - 1 = -\frac{X^2}{2} + \mathrm{j}X.$$

Dans le cas où $X \ll 1$, on peut linéariser cette expression :

$$\Delta' \approx \mathrm{j}X.$$

La solution de (4) s'écrit alors

$$\underline{k} = 1 + \mathrm{j}\frac{X}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{j}X}{2}} = 1 + \mathrm{j}\frac{X}{2} \pm (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{X}{2}}.$$

Cette expression peut s'écrire

$$\underline{k} = 1 \pm (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{X}{2}} + \mathrm{j}\frac{(\sqrt{X})^2}{2}.$$

Comme $X \ll 1$, en se limitant au premier ordre en $\sqrt{X}$ on obtient

$$\boxed{\underline{k} = 1 \pm (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{X}{2}}}\,.$$

15. Le module de $\underline{k}$ s'écrit

$$\begin{aligned}|\underline{k}| &= \left[\left(1 \pm \sqrt{\frac{X}{2}}\right)^2 + \frac{X}{2}\right]^{1/2} \\ &= \left[1 + \frac{X}{2} \pm \sqrt{2X} + \frac{X}{2}\right]^{1/2} \\ &= \left[1 \pm \sqrt{2X} + \frac{(\sqrt{X})^2}{2}\right]^{1/2}\end{aligned}$$

soit au premier ordre en $\sqrt{X}$ dans le radical

$$|\underline{k}| \approx \left[1 \pm \sqrt{2X}\right]^{1/2}.$$

En développant l'expression à l'ordre le plus bas en $\sqrt{X}$ on obtient

$$|\underline{k}| \approx 1 \pm \sqrt{\frac{X}{2}}.$$

Dans le cas d'une ligne infini, la tension ne peut diverger ; il faut donc conserver la solution telle que $|\underline{k}| < 1$, ce qui correspond au signe « − » :

$$\underline{k} = 1 - (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{X}{2}} = 1 - \sqrt{\frac{X}{2}} - \mathrm{j}\sqrt{\frac{X}{2}}$$

et

$$\boxed{|\underline{k}| = 1 - \sqrt{\frac{X}{2}}}\,.$$

16. Identifions l'expression proposée avec la loi obtenue :

$$\frac{U_n}{U_0} = \mathrm{e}^{-\frac{n}{n_0}} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n_0}}\right)^n = |\underline{k}|^n$$

On en déduit

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n_0}} = |\underline{k}| = 1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$$

soit

$$-\frac{1}{n_0} = \ln\left(1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right) \approx -\sqrt{\frac{RC\omega}{2}},$$

d'où

$$\boxed{n_0 = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}}}\,.$$

17. L'hypothèse $X \ll 1$ effectuée ici est la même que l'hypothèse $RC\omega \ll 1$ nécessaire pour utiliser le modèle de la ligne continue étudiée en 2.2.2.

L'amplitude de la n-ième cellule est donnée par

$$\begin{aligned}U_n = |\underline{k}|\,U_0 = \left(1 - \sqrt{\frac{X}{2}}\right)^n U_0 &= \mathrm{e}^{\left[n\ln\left(1-\sqrt{\frac{X}{2}}\right)\right]}\,U_0 \\ &\approx \mathrm{e}^{-n\sqrt{\frac{X}{2}}}\,U_0 = U_0\,\mathrm{e}^{-n\sqrt{\pi RCf}}\,.\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression

$$U_n = U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0} \quad \text{avec} \quad n_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi RCf}}$$

obtenue dans le cadre du passage à la limite continue pour $X \ll 1$.