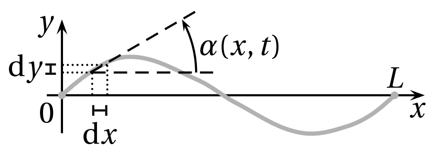
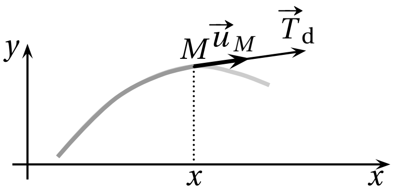
Physique des ondes (complément) La corde vibrante

1 — Équation d'onde

On considère une corde de longueur L, de masse linéique μ, soumise à une tension T_0 au repos.



corde en vibration



L'élément de corde est soumis aux deux forces de tension $\vec{T}_\mathrm{d}$ et $\vec{T}_\mathrm{g}$ de la part du reste de la corde. Le principe de la dynamique, appliqué dans le référentiel terrestre galiléen, s'écrit :

$$\mu\,\mathrm{d}x\,\vec{a} = \vec{T}_\mathrm{d} + \vec{T}_\mathrm{g} \tag{1}$$

avec $\vec{a} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y$ et avec l'hypothèse d'un déplacement purement transversal.
La projection de (1) sur $\vec{e}_x$ conduit à :

$$0 = T(x+\mathrm{d}x, t)\cos\alpha(x+\mathrm{d}x, t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t)\,.$$

Comme $\cos\alpha \approx 1$, on a $T(x+\mathrm{d}x,t) - T(x,t) = \dfrac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x = 0$, soit $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$. La tension est donc uniforme le long de la corde et ne dépend que du temps : $T(t)$.
La projection de (1) sur $\vec{e}_y$ conduit à :

$$\mu\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t)\sin\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - T(t)\sin\alpha(x,t) \approx T(t)\left[\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - \alpha(x,t)\right] = T(t)\frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathrm{d}x\,.$$

Comme $\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$, on en déduit :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,. \tag{2}$$

Notons T_0 la tension uniforme de la corde quand celle-ci est au repos. Lors des petits mouvements, la tension subit de faibles variations autour de sa valeur au repos : $T(t) = T_0 + T_1(t)$, avec $T_1(t) \ll T_0$. En se limitant au premier ordre, on peut écrire :

$$T(t)\frac{\partial y}{\partial x} = \left[T_0 + T_1(t)\right]\frac{\partial y}{\partial x} = T_0\left[1 + \frac{T_1(t)}{T_0}\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

Le terme $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \alpha$ est un infiniment petit du premier ordre, ainsi que le terme $\dfrac{T_1(x)}{T_0}$. En ne retenant pas le produit de ces deux termes, qui est donc un infiniment petit du second ordre, on obtient

$$T(t)\frac{\partial y}{\partial x} \simeq T_0\frac{\partial y}{\partial x}$$

En dérivant par rapport à x, on en déduit $T(t)\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx T_0\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. L'équation (2) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0\,. \tag{3}$$

2 — Impédance

2.1 Expression générale pour une progressive

La corde située « à droite » du point x exerce sur la partie située « à gauche » de ce point la force $\vec{T}_\mathrm{d}$. La composante transversale de cette force est

$$T_y(x,t) = \vec{T}_\mathrm{d} \cdot \vec{e}_y = T_0 \sin\alpha(x,t) \approx T_0 \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Considérons une onde progressive dans le sens des x croissants, de la forme

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f(u) \quad \text{avec} \quad u = t - \frac{x}{c}.$$

L'élément de corde situé à droite de l'abscisse x se met en mouvement sous l'effet de l'onde; il est soumis de la part de la corde située à gauche (là « d'où vient l'onde ») à la force $-\vec{T}_\mathrm{d}$. Le mouvement transversale est donc dû à la composante transversale $T_{y,\mathrm{g}}(x,t) = -T_y(x,t)$. La réponse de la corde à cette force est caractérisée par la vitesse transverse $\dfrac{\partial y}{\partial t}$. On peut donc définir une **impédance**[1] de la corde

$$Z = \frac{\text{cause}}{\text{réponse}} \quad \text{soit} \quad \boxed{Z = -\frac{T_y}{v_y}}.$$

Dans le cas de l'onde progressive considérée, on a

$$T_y = T_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{T_0}{c} f'(u) \quad \text{et} \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(u).$$

L'impédance a donc pour expression

$$\boxed{Z = \frac{T_0}{c} = \sqrt{\mu T_0}}.$$

- L'impédance ne dépend que des caractéristiques de la corde, et a même valeur en tout point.
- En considérant une onde progressive dans le sens des x décroissant, $y(x,t) = g(t + x/c)$, on montre facilement que
$$Z_- = -\frac{T_0}{c} = -\sqrt{\mu T_0}.$$
- Dans le cas général d'une onde $y(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$, le rapport $-T_y/v_y$ n'est plus constant.

2.2 Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux différents

On considère le cas de la corde constituée de deux parties : pour $x < 0$, sa masse linéique est μ_1, pour $x > 0$, sa masse linéique est μ_2.

En $x < 0$, on observe une onde incidente $y_\mathrm{i}(x,t) = f(x - c_1 t)$, une onde réfléchie $y_\mathrm{r}(x,t) = g(x + c_1 t)$ où $c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ est la célérité dans la partie $x < 0$.

En $x > 0$, on observe une onde transmise $y_\mathrm{t}(x,t) = h(x - c_2 t)$ où $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$ est la célérité dans la partie $x < 0$.

Pour une onde progressive dans le sens des x croissants, l'impédance de la corde vaut $Z_1 = \dfrac{T}{c_1}$ pour $x < 0$ et $Z_2 = \dfrac{T}{c_2}$ pour $x > 0$.

1. Le terme impédance représente un emprunt (1892) à l'anglais *impedance* (1886), terme d'électricité créé par Heaviside à partir de *to impede* « empêcher, retenir ». Le verbe anglais est un emprunt au latin *impedire* « entraver », « empêcher de marcher », de la même famille que *pes*, *pedis*, (pied). Plus l'impédance du système est grande, plus sa réponse à une cause est petite.

L'élongation de la corde est donc donnée par

$$y(x,t) = \begin{cases} f(x - c_1 t) + g(x + c_1 t) & \text{pour } x < 0 \\ h(x - c_2 t) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, l'élongation doit être continue :

$$f(-c_1 t) + g(c_1 t) = h(-c_2 t)\,.$$

En $x = 0$, la tangente à la corde doit être continue :

$$f'(-c_1 t) + g'(c_1 t) = h'(-c_2 t)\,.$$

Intégrons cette dernière relation :

$$-\frac{1}{c_1} f(-c_1 t) + \frac{1}{c_1} g(c_1 t) = -\frac{1}{c_2} h(-c_2 t)\,.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} f(-c_1 t) + g(c_1 t) = h(-c_2 t) \\ -\dfrac{1}{c_1} f(-c_1 t) + \dfrac{1}{c_1} g(c_1 t) = -\dfrac{1}{c_2} h(-c_2 t) \end{cases}$$

Le coefficient de réflexion est défini par

$$r = \frac{y_\mathrm{r}(0,t)}{y_\mathrm{i}(0,t)} = \frac{g(c_1 t)}{f(-c_1 t)} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}\,.$$

Le coefficient de transmission est défini par Le coefficient de réflexion est défini par

$$t = \frac{y_\mathrm{t}(0,t)}{y_\mathrm{i}(0,t)} = \frac{h(-c_2 t)}{f(-c_1 t)} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}\,.$$

On peut exprimer les coefficients en fonction des impédances de chaque partie de la corde :

$$\boxed{r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}\,.$$

➤ On retrouve le résultat usuel : il n'y a pas d'onde réfléchie si $Z_1 = Z_2$, situation qui correspond à l'**adaptation d'impédance**.

3 — Énergie d'une corde vibrante

Considérons une onde progressive dans le sens des x croissants : $y(x,t) = f(t - x/c)$.

3.1 Puissance transmise

La partie de la corde à gauche de l'abscisse x exerce sur la partie à droite à force $\vec{T}_\mathrm{g} = -\vec{T}_\mathrm{d}$. Elle lui transmet la puissance

$$\mathcal{P}(x,t) = \vec{T}_\mathrm{g} \cdot \vec{v} = -T_y(x,t) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\,,$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}(x,t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}}\,.$$

➤ La partie à droite transmet à la partie à gauche la puissance $-\mathcal{P}(x,t)$.

3.2 Bilan local d'énergie

Sous l'effet de l'onde, un élément dx de corde possède :
— une énergie cinétique du fait de son mouvement ;
— une énergie potentielle du fait du travail des forces de tension.
Le bilan d'énergie s'écrit sous la forme générale

$$\mathrm{d}(\delta\mathcal{E}) = \delta^2\mathcal{E}_{\text{éch}}.$$

On peut définir une énergie mécanique linéique $e(x,t)$ portée par la corde ; l'élément de longueur dx porte l'énergie

$$\delta\mathcal{E} = e(x,t)\,\mathrm{d}x$$

et sa variation pendant dt est donnée par

$$\mathrm{d}(\delta\mathcal{E}) = [e(x,t+\mathrm{d}t) - e(x,t)]\,\mathrm{d}x = \frac{\partial e}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

L'énergie échangée est l'énergie reçue de la part des forces de tension en x et en $x+\mathrm{d}x$, soit

$$\delta^2\mathcal{E}_{\text{éch}} = \mathcal{P}(x,t)\,\mathrm{d}t - \mathcal{P}(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Le bilan local s'écrit alors

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} = 0}.$$

On calcule

$$-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + T_0\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}.$$

On a d'une part

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]$$

et d'autre part

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right].$$

On en déduit

$$-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{T_0}{2c^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

soit avec $T_0 = \mu c^2$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} = 0}.$$

On retrouve la formulation du bilan local d'énergie, la densité linéique d'énergie s'exprimant

$$\boxed{e(x,t) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

- Le terme $e_{\mathrm{c}}(x,t) = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ s'interprète comme l'énergie cinétique linéique.
- Le terme $e_{\mathrm{p}}(x,t) = \dfrac{T_0}{2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ s'interprète comme l'énergie potentielle linéique.
- Pour cette onde progressive selon $\vec{e}_x$, on peut définir un vecteur densité de courant de puissance $\vec{R} = -T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_x$, et le bilan local s'écrit sous la forme habituelle

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{R} = 0}.$$