Physique des ondes (complément) **Approximation des milieux continus**

On se propose dans ce document d'étudier la propagation d'ondes dans un milieu discontinu, dans le cadre de l'approximation des milieux continus.

Description du système

On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, selon un axe Ox, constituée de masses m identiques, reliées deux à deux par un ressort de raideur k et de longueur au repos a. Les masses, qui modélisent les atomes d'un cristal, se déplacent sans frottement le long de l'axe Ox. Au repos, elles sont distantes de a.
On a donc une description discrète du milieu :

— la masse numéro n a pour abscisse $x_n^0 = na$ quand elle est au repos ;

— elle a pour abscisse $x_n(t) = x_n^0 + \xi_n(t) = na + \xi_n(t)$ en présence de l'onde.

La grandeur algébrique $\xi_n(t)$ repère donc l'écart de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre. Sur la figure 1, on a par exemple $\xi_{n-1}(t) < 0$, $\xi_n(t) > 0$ et $\xi_{n+1}(t) < 0$.

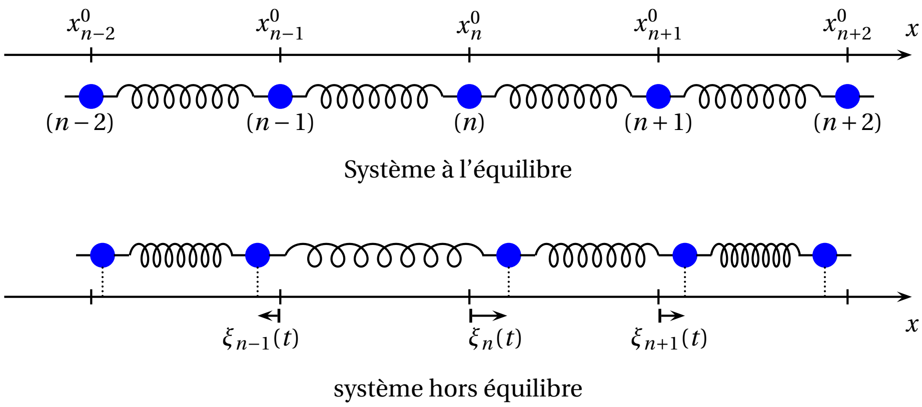


FIGURE 1 – Chaîne infinie d'oscillateurs.

Mise en équation

Nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse numéro n, en projection sur l'axe Ox. Le mouvement le long de cet axe se faisant sans frottement, seules les forces de tensions des ressorts sont à considérer (on néglige l'effet de la pesanteur).
La masse (n) est donc soumise à la tension $\vec{T}_\mathrm{d}$ du ressort « de droite », et à celle $\vec{T}_\mathrm{g}$ du ressort « de gauche ».
La longueur du ressort de gauche étant donnée par

$$L_\mathrm{g} = x_n(t) - x_{n-1}(t) = x_n^0 + \xi_n(t) - x_{n-1}^0 - \xi_{n-1}(t) = a + \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)\,,$$

la force qu'il exerce sur la masse (n) est donnée par

$$\vec{T}_\mathrm{d} = k[L_\mathrm{d} - a]\,\vec{e}_x = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)]\,\vec{e}_x\,.$$

L'accélération de la masse (n) étant $\dfrac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = \dfrac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x$, le PFD en projection selon Ox s'écrit

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)]}\,. \qquad (1)$$

Approximation des milieux continus

Le mouvement des masses sous l'effet d'une onde est décrit par l'équation de récurrence (1). L'approximation des milieux continus permet de se ramener à une équation aux dérivées partielles, où l'onde est décrite par une fonction continue de x et de t.
Cette approximation est valable quand la distance entre chaque masse est très petite devant la longueur d'onde de l'onde considérée : $\boxed{a \ll \lambda}$.

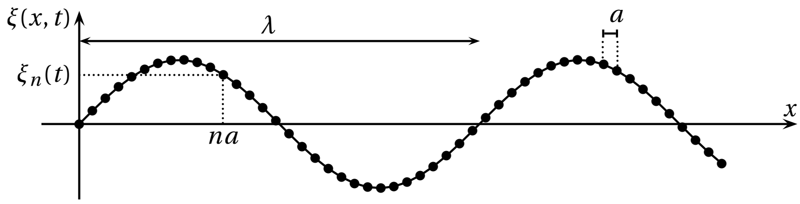


FIGURE 2 – Approximation des milieux continus : à l'échelle de la longueur d'onde λ, la chaîne est vue comme un milieu continu.

➤ Si le système décrit une tige solide, a représente la distance entre deux atomes ; comme $a \approx 10^{-10}$ m, on est bien dans le cadre de l'approximation des milieux continus.

Comme le visualise la figure 2, nous pouvons remplacer la description discrète $\{\xi_n(t)\}_n$ de l'état de la chaîne d'oscillateurs par une fonction continu de l'espace et du temps $\xi(n,t)$, qui interpole la position des masses. Cette fonction $\xi(x,t)$, qui décrit de façon continue l'écart des masses à leur position d'équilibre, doit satisfaire aux propriétés suivantes :

— elle est de classe $\mathscr{C}^2$;

— elle coïncide avec l'écart à l'équilibre de la masse (n) quand $x = na$, soit $\xi(na,t) = \xi_n(t)$.

La distance a étant considérée comme un « infiniment petit », nous pouvons effectuer deux développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $x_n^0 = na$:

$$\xi_{n+1}(t) = \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_n(t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

et

$$\xi_{n-1}(t) = \xi(x_n^0 - a, t) = \xi(x_n^0, t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_n(t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t) = a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \xi_{n-1}(t) - \xi_n(t) = -a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

soit

$$[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - [\xi_{n-1}(t) - \xi_n(t)] = 2\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}^2 \xi_n(t)}{\mathrm{d}t^2}$ devient $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ dans l'approximation des milieux continus, l'équation (1) s'écrit

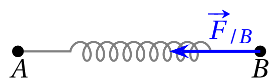
$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ka^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

On retrouve l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}}.$$

Annexe : force de rappel exercée par un ressort

On considère un ressort dont les extrémités A et B ont pour positions A_0 et B_0 au repos.



La force de tension exercée sur l'extrémité B est donnée par $\boxed{\vec{F}_{/B} = -k\left[\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_0B_0}\right]}$.

➤ La force exercée sur l'extrémité A est opposée : $\vec{F}_{/A} = -\vec{F}_{/B}$.

➤ Cette notation vectorielle est toujours valable, et permet de ne pas « réfléchir » pour trouver le bon signe de la force !