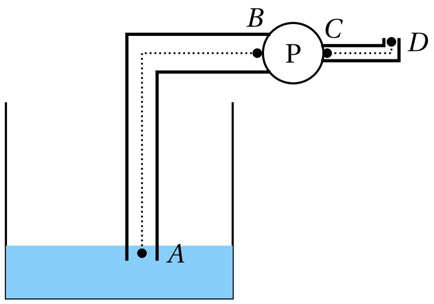
TD bilans — Bilans dynamiques — solution

1 — Pompe

On considère un bloc pompe P qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $h = 5$ m.
La section du tuyau AB fait 100 cm^2, celle du tuyau CD fait 10 cm^2.
La pression atmosphérique est de 1 bar, la pression de vapeur saturante de l'eau à 20 °C est de 2,3 kPa.
Le débit volumique est $D_v = 10\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$.



1. Quelles hypothèses peut-on faire sur l'écoulement ?

2. Quelle est la vitesse du fluide en A ?

3. Que vaut la pression en B ? Y a-t-il un risque de cavitation ?

4. Quelle est la puissance de la pompe ?

5. Quelle altitude maximale pourra atteindre le jet d'eau ?

---

2 — Perte de charge singulière

1. La pression p_1 s'exerce sur les deux faces en amont : la section S_1 et la partie droite d'aire $S_2 - S_1$ en contact avec la zone morte, soit sur la surface totale $S_1 + (S_2 - S_1) = S_2$. La pression p_2 s'exerce sur la section S_2 en aval. Le bilan total des forces s'exerçant sur le fluide est donc

$$\boxed{\vec{F} = S_2(p_1 - p_2)\vec{e}_x}.$$

2. Le débit massique, conservé, s'écrit

$$\boxed{D_m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2}.$$

3. On construit un système fermé :

— à l'instant t, il est constitué du fluide entre les sections S_1 et S_2 du schéma, ainsi que de la masse $\mathrm{d}m = D_m\,\mathrm{d}t$ de fluide qui franchit la section amont pendant $\mathrm{d}t$, à la vitesse v_1 ;

— à l'instant $t + \mathrm{d}t$, il est constitué du fluide entre les sections S_1 et S_2 du schéma, ainsi que de la masse $\mathrm{d}m = D_m\,\mathrm{d}t$ qui franchit la section aval pendant $\mathrm{d}t$, à la vitesse v_2.

Écrivons la quantité de mouvement de ce système à l'instant t, soit

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^*(t) + \mathrm{d}m\, v_1 \vec{e}_x$$

et à l'instant $t + \mathrm{d}t$, soit

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}^*(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\, v_2 \vec{e}_x.$$

L'écoulement étant stationnaire, la quantité de mouvement de la partie de fluide comprise entre les sections amont et aval, fixes, vérifie $\vec{P}^*(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}^*(t)$. On a donc

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = D_m(v_2 - v_1)\vec{e}_x\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = D_m(v_2 - v_1)\vec{e}_x.$$

Le principe de la résultante dynamique s'écrit

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \vec{F}$$

soit en projection selon $\vec{e}_x$:

$$\boxed{D_m(v_2 - v_1) = S_2(p_1 - p_2)}.$$

4. On a donc

$$p_2 = p_1 + \frac{D_m}{S_2}(v_1 - v_2) = p_1 + \rho v_2 (v_1 - v_2)$$

soit

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + v_2(v_1 - v_2).$$

On remarque que

$$v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2 = -2v_2^2 + 2v_1 v_2 = 2v_2(v_1 - v_2),$$

d'où

$$\boxed{\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2}{2}}.$$

La relation de Bernoulli conduirait à

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2}.$$

Le théorème de Bernoulli est valable pour un écoulement parfait. On peut l'utiliser dans le cas d'un écoulement réel si les effets de la viscosité sont confinés dans une couche limite de faible épaisseur. On observe ici un décollement de la couche limite au niveau du changement de section, entraînant l'apparition d'une zone « morte » où la viscosité ne peut plus être négligée. On ne peut donc utiliser le théorème de Bernoulli.

5. En terme de pression, la relation obtenue s'écrit

$$p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}=p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}-\frac{\rho(v_2-v_1)^2}{2}=p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}-\Delta p$$

où la perte de charge est donnée par

$$\Delta p=\frac{\rho(v_2-v_1)^2}{2}\,.$$

Comme $S_1v_1=S_2v_2$, on en déduit $\Delta p=\alpha\frac{\rho v_1^2}{2}$, avec

$$\boxed{\alpha=\left(1-\frac{S_1}{S_2}\right)^2}\,.$$

3 — Homogénéisation d'un écoulement

1. Les forces tangentielles de viscosité homogénéisent l'écoulement, par diffusion de quantité de mouvement.

2. Deux inconnues p_3 et v_3 : il faut faire un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement.

Bilan de masse :

$$m(t)+\delta m_1+\delta m_2=m(t+\mathrm{d}t)+\delta m_3$$

avec

$$\delta m_1=\mu\frac{S}{2}v_0\,d\mathrm{d}t\,,$$

$$\delta m_2=\mu\frac{S}{2}\frac{v_0}{2}\,d\mathrm{d}t$$

et

$$\delta m_3=\mu S v_3\,\mathrm{d}t\,.$$

La conservation de la masse conduit à

$$\mu\frac{S}{2}v_0\,\mathrm{d}t+\mu\frac{S}{2}\frac{v_0}{2}\,\mathrm{d}t=\mu S v_3\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{v_3=\frac{3v_0}{4}}\,.$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\delta m_1 v_1+\delta m_2 v_2=\delta m_3 v_3$$

d'où

$$\mu\frac{S}{2}v_0^2\,\mathrm{d}t+\mu\frac{S}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2\mathrm{d}t=\mu S v_3^2\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{5}{8}\mu S v_0^2=\frac{P}{16}\mu S v_0^2$$

d'où

$$\frac{\mathrm{D}p_x}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{16}\mu S v_0^2\,.$$

Le poids et les forces de pression latérales sont sans effet dans la direction Ox ; il reste les forces de pression en amont et en aval :

$$-\frac{1}{16}\mu S v_0^2=-p_3S+p_0\frac{S}{2}+p_0\frac{S}{2}$$

d'où

$$\boxed{p_3=p_0+\frac{1}{16}\mu v_0^2}\,.$$

3. On a

$$E_\mathrm{c}(t)=E_\mathrm{c}^0+\frac{1}{2}\delta m_1 v_1^2+\frac{1}{2}\delta m_2 v_2^2$$

soit

$$E_\mathrm{c}(t)=E_\mathrm{c}^0+\frac{9}{32}\mu S v_0^3\,\mathrm{d}t$$

et

$$E_\mathrm{c}(t+\mathrm{d}t)=E_\mathrm{c}^0+\frac{1}{2}\delta m_3 v_3^2=E_\mathrm{c}^0+\frac{27}{128}\mu S v_0^3\,\mathrm{d}t\,.$$

On a donc, avec $v_3=3v_0/4$:

$$\frac{\mathrm{D}E_\mathrm{c}}{\mathrm{D}t}=-\frac{9}{128}\mu S v_0^3\,.$$

Le poids et les forces de pression latérales ont une puissance nulle (forces normales au déplacement) ; la puissance des forces de viscosité sur les parois est nulle car la vitesse du fluide est nulle sur les parois fixes. Il reste la puissance des forces de pression en amont et en aval :

$$\frac{\mathrm{D}E_\mathrm{c}}{\mathrm{D}t}=-\frac{9}{128}\mu S v_0^3=-p_3Sv_3+p_0\frac{S}{2}v_0+p_0\frac{S}{2}\frac{v_0}{2}+\mathcal{P}\mathrm{int}$$

d'où

$$\mathcal{P}\mathrm{int}=-\frac{9}{128}\mu S v_0^3+\frac{3}{4}Sv_0(p_3-p_0)=\mu S v_0^3\left(\frac{3}{64}-\frac{9}{128}\right)\,.$$

On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}\mathrm{int}=-\frac{3}{128}\mu S v_0^3<0}\,.$$

Les forces intérieures de viscosité sont donc dissipatives.

4 — Tuyère de Laval

1. Le bilan d'énergie s'écrit, entre $x=0$ et x à la cote z constante :

$$D_\mathrm{m}\left[h(x)-h_0+\frac{1}{2}(v^2(x)-v_0^2)\right]=\mathscr{P}_\mathrm{m}+\mathscr{P}_Q\,.$$

La tuyère étant calorifugée, on a $\mathscr{P}_Q=0$. Il n'y a pas de partie mobiles : $\mathscr{P}_\mathrm{m}=0$. On a donc

$$v^2(x)=v_0^2+2[h_0-h(x)]\,.$$

Pour le gaz parfait :

$$\begin{aligned}h_0-h(x)&=c_\mathrm{p}[T_0-T(x)]=\frac{\gamma R}{(\gamma-1)M}[T_0-T(x)]\\&=\frac{\gamma RT_0}{(\gamma-1)M}\left[1-\frac{T(x)}{T_0}\right]=\frac{\gamma P_0}{(\gamma-1)\mu_0}\left[1-\frac{T(x)}{T_0}\right]\,.\end{aligned}$$

Le gaz parfait subissant une évolution isentropique, la loi de Laplace s'écrit

$$P^{1-\gamma}(x)T^\gamma(x)=P_0^{1-\gamma}T_0^\gamma\,,$$

d'où l'équation de Saint-Venant

$$\boxed{v^2(x)=v_0^2+\frac{2\gamma P_0}{(\gamma-1)\mu_0}\left[1-\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right]}\,.$$

2. La conservation du débit massique s'écrit $D_\mathrm{m} = \mu(x)S(x)v(x) = \text{cte}$. La dérivée logarithmique s'écrit alors

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0.$$

La loi de Laplace $p(x)\mu^{-\gamma}(x) = \text{cte}$ conduit à

$$\frac{1}{p(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\gamma}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}.$$

L'équation d'Euler en projection selon Ox s'écrit

$$v(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\gamma p(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -v(x)\frac{\mu(x)}{\gamma p(x)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

d'où

$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v^2(x)\frac{\mu(x)}{\gamma p(x)}\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

soit

$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\left[\frac{v^2(x)\mu(x)}{\gamma p(x)} - 1\right].$$

On a donc

$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \left[M^2(x) - 1\right]\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

avec

$$M^2(x) = \frac{v^2(x)\mu(x)}{\gamma p(x)}.$$

3. On veut $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} > 0$.

Tant que $v(x) < c(x)$, on a $M^2 - 1 < 0$; il faut donc $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$: la tuyère doit être convergente.

Pour $v(x) > c(x)$, on a $M^2 - 1 > 0$; il faut alors $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} > 0$: la tuyère doit être divergente.

Le profil de la tuyère doit donc être convergent-divergent comme indiqué sur le schéma de l'énoncé.

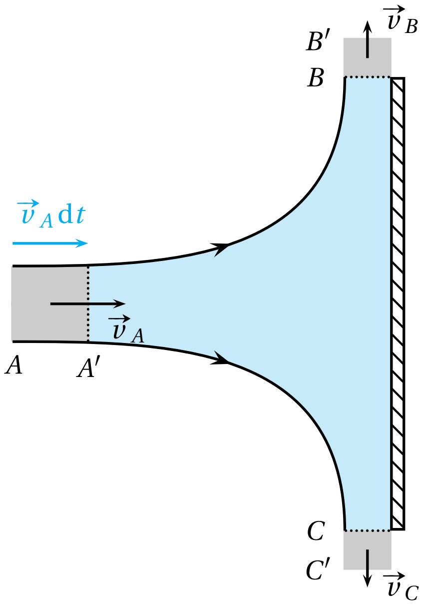
---

5 — Action d'un jet sur une plaque

On considère le système fermé, représenté ainsi de profil :

— ABC à l'instant t;

— $A'B'C'$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$.



À l'instant t, il comporte, outre la partie commune, la masse δm de fluide qui va entrer de t à $t + \mathrm{d}t$, à la vitesse uniforme $\vec{v}_A$.

À l'instant $t+\mathrm{d}t$, il comporte, outre la partie commune, la masse $\mathrm{d}m$ qui sort de t à $t + \mathrm{d}t$ (même masse que précédemment du fait de la stationnarité de l'écoulement); cette partie de fluide a la forme d'un anneau, la vitesse étant radiale. Elle admet l'axe de la plaque comme axe de symétrie.

La partie commune entre t et $t + \mathrm{d}t$ est donc $A'BC$, siège d'un écoulement stationnaire. Les grandeurs relatives à cette partie sont donc indépendantes du temps.

La quantité de mouvement à l'instant t est

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{A'BC} + \delta m\,\vec{v}_A.$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, elle vaut

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}_{A'BC} + \delta\vec{P}$$

Du fait de la symétrie radiale du fluide sortant de la plaque, la quantité de mouvement $\delta\vec{P}$ du fluide qui sort de la plaque est globalement nulle : on peut regrouper deux à deux des masses élémentaires radialement opposées; leurs vitesse étant opposées, on a avec la notation de la figure

$$\delta m_B\,\vec{v}_B + \delta m_C\,\vec{v}_C = \vec{0}.$$

La variation de la quantité de mouvement vaut donc

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = -\delta\,\vec{v}_A = -D_\mathrm{m}\,\vec{v}_A\,\mathrm{d}t = -\rho S v_A\,\vec{v}_A\,\mathrm{d}t,$$

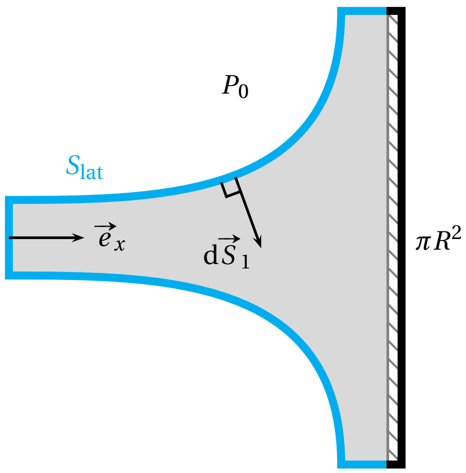
d'où

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = -\rho S v_A\,\vec{v}_A.$$

Le système est soumis à :

— la force $\vec{F}_\mathrm{air}$ de pression de l'air sur la surface latérale S_lat;

— la force $\vec{F}_\mathrm{plaque/jet}$ de la part de la plaque.



La pression de l'air P_0 étant uniforme, sa résultante sur une surface fermée est nulle. On complète alors la surface latérale par la surface plane πR^2 (en noir sur la figure), et la résultante des forces de pression sur la surface fermée ainsi construite s'écrit

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{air}} - P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$$

d'où

$$\vec{F}_{\text{air}} = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x ,$$

et le bilan s'écrit

$$-\rho S v_A^2 \vec{e}_x = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x + \vec{F}\text{plaque/jet}.$$

On en déduire la force du jet sur la plaque

$$\boxed{\vec{F}\text{jet/plaque} = \rho S v_A^2 \vec{e}_x + P_0 \pi R^2 \vec{e}_x}.$$

6 — Décollage d'une fusée

1. Se reporter au cours. On effectue un bilan de quantité de mouvement sur la fusée :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_z - Qu \vec{e}_z .$$

La loi de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -m(t) g \vec{e}_z$$

soit

$$m \frac{dv}{dt} \vec{e}_z = -m(t) g \vec{e}_z + Qu \vec{e}_z .$$

On interprète cette expression en introduisant une « force de poussée » $\vec{\Pi}$ telle que

$$m(t) \frac{dv}{dt} \vec{e}_z = -m(t) g \vec{e}_z + \vec{\Pi}$$

avec $\boxed{\vec{\Pi} = Qu \vec{e}_z}$.

2. Le fusée décolle si à $t = 0$ on a

$$\frac{dv}{dt} > 0$$

soit si

$$-m(0) g + Qu > 0 .$$

Avec $m(0) = m_0 + m_c$, on en déduit $Q > Q_{\min}$, avec

$$\boxed{Q_{\min} = (m_0 + m_c) \frac{g}{u}}.$$

3. On a établi

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t) g + Qu .$$

Avec $m(t) = m_0 + m_c - Qt$, on en déduit

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{Qu}{m_0 + m_c - Qt} \tag{1}$$

d'où en séparant les variables

$$dv = -g\, dt + u \frac{Q\, dt}{m_0 + m_c - Qt} .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} v(t) &= -gt + u \int_0^t \frac{Q\, dt}{m_0 + m_c - Qt} \\ &= -gt - u \int_0^t \frac{d(m_0 + m_c - Qt)}{m_0 + m_c - Qt} \end{aligned}$$

soit

$$v(t) = -gt - u \ln\left(\frac{m_0 + m_c - Qt}{m_0 + m_c}\right).$$

D'après (1) si $Q > Q_{\min}$, on a $\dfrac{dv}{dt} > 0$: la vitesse est une fonction croissante du temps. La vitesse maximale est alors atteinte à l'instant t_m où tout la carburant a été brûlé, soit $Qt_m = m_c$. On a alors

$$v_{\max} = -g t_{\max} - u \ln \frac{m_0}{m_0 + m_c}$$

soit

$$\boxed{v_{\max} = -\frac{m_c g}{Q} + u \ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right)}.$$

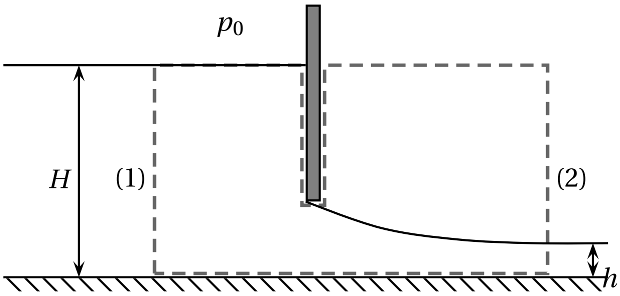
En prenant $Q = Q_{\min} = (m_0 + m_c)\frac{g}{u}$, on calcule

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -\frac{m_c}{m_0 + m_c} u + u \ln \frac{m_0}{m_0 + m_c} \\ &= u \left[\ln\left(1 + \frac{m_c}{m_0}\right) - \frac{m_c}{m_0 + m_c} \right] \end{aligned}$$

soit $v_{\max} = 7{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
En prenant $1{,}2 Q_{\min}$, on trouve $v_{\max} = 13\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

7 — Effort sur un radier

Le système Σ défini par la surface de contrôle indiquée sur la figure est un système ouvert.



On construit le système fermé associé :

— $S(t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section d'entrée pendant $\mathrm{d}t$;

— $S(t+\mathrm{d}t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section de sortie pendant $\mathrm{d}t$.

On a

$$\delta m = \mu L H v_1 \,\mathrm{d}t = \mu L h v_2 \,\mathrm{d}t\,.$$

Calculons les quantités de mouvement

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_1 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_2 \vec{e}_x$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \mu L(h v_2^2 - H v_1^2)\vec{e}_x\,.$$

Les actions extérieures sont :

— la force de pression $\vec{F}_{\mathrm{p},1}$ sur la section (1) d'entrée ;

— la force de pression $\vec{F}_{\mathrm{p},2}$ sur la section (2) de sortie ;

— la force $\vec{F}_{\mathrm{r/e}}$ exercée par le radier.

Dans la zone (1), le champ des vitesses est uniforme. La répartition de pression est donc hydrostatique

$$p_1(z) = p_0 + \mu g (H - z)\,.$$

De même dans la zone (2)

$$p_2(z) = p_0 + \mu g (h - z)\,.$$

On a donc

$$\vec{F}_{\mathrm{p},1} = \int_0^H p_1(z) L \,\mathrm{d}z\, \vec{e}_x = \left(p_0 H L + \mu g L \frac{H^2}{2}\right)\vec{e}_x\,.$$

De même

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{p},2} &= -p_0 L (H-h)\vec{e}_x - \int_0^h p_2(z) L\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x \\ &= -p_0 L (H-h)\vec{e}_x - p_0 L h \vec{e}_x - \mu g L \frac{h^2}{2}\vec{e}_x \\ &= -p_0 L H \vec{e}_x - \mu g L \frac{h^2}{2}\vec{e}_x\,.\end{aligned}$$

La résultante des forces de pression est donc

$$\vec{F}_\mathrm{p} = \mu g L \left(\frac{H^2 - h^2}{2}\right)\vec{e}_x\,.$$

En notant $\vec{F}_{\mathrm{r/e}} = F_{\mathrm{r/e}}\vec{e}_x$, la loi de la dynamique s'écrit, en projection selon Ox

$$\mu L (h v_2^2 - H v_1^2) = \mu g L \left(\frac{H^2 - h^2}{2}\right) + F_{\mathrm{r/e}}\,.$$

L'effort exercé sur le radier est $F = -F_{\mathrm{r/e}}$, soit

$$F = \frac{\mu g L}{2}(H^2 - h^2) - \mu L (h v_2^2 - H v_1^2)\,.$$

Avec $H v_1 = h v_2$, on a

$$\boxed{F = \frac{\mu g L}{2}(H^2 - h^2) - \mu L H v_1^2 \left(\frac{H}{h} - 1\right)}\,.$$

Avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on calcule $\boxed{F = 2{,}7\times 10^3\ \mathrm{N}}$.

8 — Force sur un tuyau coudé

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t) = D_\mathrm{m}\mathrm{d}t(\vec{v}_C - \vec{v}_B)$$

B d'où

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = D_\mathrm{m}(\vec{v}_C - \vec{v}_B)\,.$$

Les actions extérieures sont

$$\vec{F}_{\mathrm{tuyau}\to BC}\,,$$

$$\vec{F}_{\mathrm{atm}\to\mathcal{S}} = -P_0 S \vec{u} = P_0 S(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$$

et

$$\vec{F}_{\mathrm{eau\ amont}} = P_1 S \vec{e}_x\,.$$

La vitesse est donnée par

$$v = \frac{D_\mathrm{m}}{\rho S}$$

d'où

$$\vec{v}_B = v\,\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{v}_C = v(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)\,.$$

On a donc

$$\vec{F}_{\mathrm{eau}\to\mathrm{tuyau}} = P_1 S \vec{e}_x - P_0 S \vec{u} + D.\mathrm{m} v(\vec{e}_x - \vec{u})$$

soit

$$\vec{F}_{\mathrm{eau}\to\mathrm{tuyau}} = \left(\frac{D_\mathrm{m}^2}{\rho S} + P_0 S\right)\left[(1-\cos\alpha)\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y\right] + K D_\mathrm{m} S \vec{e}_x\,.$$

9 — Ressaut hydraulique

1. Le théorème de Bernoulli ne peut pas s'appliquer entre x_1 et x_2 du fait de la zone turbulent située au niveau du ressaut. Il ne permet donc pas de calculer v_2 et h_2.

2. Pour $x \leqslant x_1$, le champ des vitesses est uniforme et parallèle, selon vex. On a donc une répartition hydrostatique de pression, cette dernière vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}z} = \mu g\,.$$

Avec $P_1(h_1) = P_0$, on en déduit sur la face d'entrée

$$\boxed{P_1(z) = P_0 + \mu g(h_1 - z)}\,.$$

Avec $P_2(h_2) = P_0$, la pression sur la face de sortie est donnée par

$$\boxed{P_2(z) = P_0 + \mu g(h_2 - z)}\,.$$

3. Le système Σ compris entre x_1 et x_2 est un système ouvert, en régime stationnaire. On définit le système fermé associé :

— $S(t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section x_1 pendant $\mathrm{d}t$;

— $S(t+\mathrm{d}t)$ est constitué de Σ et de la masse δm de fluide qui traverse la section x_2 pendant $\mathrm{d}t$.

On a

$$\delta m = \mu L h_1 v_1 = \mu L h_2 v_2\,.$$

La quantité de mouvement du système fermée est donnée par

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_1 \vec{e}_x$$

et

$$\vec{P}(t+\mathrm{d}t) = \vec{P}_\Sigma + \delta m v_2 \vec{e}_x\,.$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \delta m(v_2 - v_1)\,\vec{e}_x\,.$$

La résultante des forces de pression sur la face d'entrée est

$$\vec{F}_\mathrm{e} = \int_0^{h_1} P_1(z) L\,\mathrm{d}z + P_0 L(h_2 - h_1)$$

$$= P_0 L h_2 + \mu g L \int_0^{h_1} (h_1 - z)\,\mathrm{d}z = P_0 L h_2 + \mu g L\left(h_1 h_1 - \frac{h_1^2}{2}\right)$$

soit

$$\vec{F}_\mathrm{e} = P_0 L h_2 + \frac{\mu g L h_1^2}{2}\,.$$

De même, la résultante des forces de pression sur la face de sortie est

$$\vec{F}_\mathrm{s} = -\int_0^{h_2} P_2(z) L\,\mathrm{d}z = -P_0 L h_2 - \mu g L \int_0^{h_2} (h_2 - z)\,\mathrm{d}z$$

$$= -P_0 L h_2 - \mu g L\left(h_2 h_2 - \frac{h_2^2}{2}\right)$$

soit

$$\vec{F}_\mathrm{s} = -P_0 L h_2 - \frac{\mu g L h_2^2}{2}\,.$$

Le loi de la quantité de mouvement s'écrit, en projection selon Ox

$$\delta m(v_2 - v_1) = \frac{\mu g L}{2}(h_1^2 - h_2^2)\,,$$

soit avec $\delta m = \mu L h_1 v_1$

$$\mu L h_1 v_1 = (v_2 - v_1) = \frac{\mu g L}{2}(h_1^2 - h_2^2)$$

d'où

$$\boxed{h_1 v_1 (v_2 - v_1) = \frac{g}{2}(h_1^2 - h_2^2)}\,.$$

4. Avec la conservation du débit volumique $h_1 v_1 = h_2 v_2$ on peut écrire

$$h_1 v_1^2 \frac{h_1 - h_2}{h_2} = \frac{g}{2}(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)$$

d'où

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{g h_2}{2 h_1}(h_1 + h_2)}}$$

et

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{g h_1}{2 h_2}(h_1 + h_2)}}\,.$$

5. On effectue un bilan d'énergie cinétique pour le système fermé S :

$$E_\mathrm{c}(t) = E_{\mathrm{c},\Sigma} + \frac{1}{2}\delta m v_1^2$$

et

$$E_\mathrm{c}(t+\mathrm{d}t) = E_{\mathrm{c},\Sigma} + \frac{1}{2}\delta m v_2^2$$

avec $\delta m = \mu L h_1 v_1\,\mathrm{d}t$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mu L h_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2)\,.$$

La puissance des forces de pression est donnée par

$$\mathcal{P}_\mathrm{press} = \int_0^{h_1} P_1(z) L\,\mathrm{d}z\, v_1 - \int_0^{h_2} P_2(z) L\,\mathrm{d}z\, v_2$$

$$= L v_1\left(P_0 h_1 + \mu g \frac{h_1^2}{2}\right) - L v_2\left(P_0 h_2 + \mu g \frac{h_2^2}{2}\right)$$

$$= P_0 L (h_1 v_1 - h_2 v_2) + \frac{\mu g L}{2}(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2)\,.$$

Comme $h_1 v_1 = h_2 v_2$, on a

$$\mathcal{P}_\mathrm{press} = \frac{\mu g L}{2}(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2)\,.$$

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_\mathrm{press} + \mathcal{P}_\mathrm{int}$$

soit

$$\frac{1}{2}\mu L h_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\mu g L}{2}(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2) + \mathcal{P}_\mathrm{int}\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mathrm{int} &= \frac{1}{2}\mu L h_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2) - \frac{\mu g L}{2}(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2)\\ &= \frac{1}{2}\mu L h_1 v_1 (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) - \frac{\mu g L}{2}(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2)\\ &= \frac{1}{2}\mu L \frac{g}{2}(h_1^2 - h_2^2)(v_2 + v_1) - \frac{\mu g L}{2}(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2)\\ &= \frac{\mu g L}{4}\left[(h_1^2 - h_2^2)(v_2 + v_1) - 2(v_1 h_1^2 - v_2 h_2^2)\right]\end{aligned}$$

soit avec $h_1 v_1 = h_2 v_2$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\mathrm{int} &= \frac{\mu g L}{4}\left[(h_1^2 - h_2^2)(h_1 + h_2)\frac{v_1}{h_2} - 2h_1 v_1 (h_1 - h_2)\right]\\ &= \frac{\mu g L}{4}(h_1 - h_2)\left[(h_1 + h_2)^2 \frac{v_1}{h_2} - 2h_1 v_1\right]\\ &= \frac{\mu g L}{4}(h_1 - h_2)\frac{v_1}{h_2}\left[h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 h_2 - 2h_1 h_2\right]\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{int} = \frac{\mu g L}{2}\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2}(h_1 - h_2)}\,.$$

Comme $h_1 < h_2$, on a $\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{int} < 0}$: il s'agit bien d'une puissance dissipée dans la zone turbulente.

---

10 — Tourniquet hydraulique

Un tourniquet hydraulique est forme de deux branches de rayon R, éjectant chacune, à une vitesse relative u orthoradiale vers l'arrière, de l'eau avec un débit massique $D/2$. Il est alimenté par une canalisation verticale amenant le débit totale D.
La liaison entre la canalisation d'amenée et le tourniquet est supposée sans frottement et sans fuite.
On note J le moment d'inertie du tourniquet rempli de fluide par rapport à son axe.

1. On suppose le régime permanent atteint. Quelle est la vitesse de rotation ω du tourniquet ?

2. Que devient cette vitesse de rotation si on suppose le tourniquet soumis à un couple de frottement fluide $\Gamma = -\lambda\omega$?

3. Étudier le régime transitoire, en établissant la loi $\omega(t)$, avec $\omega(0) = 0$.