

Merci de suivre les conseils suivants :

- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points;
- respecter et indiquer la numérotation des questions;
- souligner ou encadrer les résultats;
- **les calculatrices ne sont autorisées que pour la partie III : jouez le jeu!**

Partie I : Mégagaf (CCINP PSI 2024)

Les calculatrices sont interdites

Dans cette épreuve, après une démonstration de Mégagaf (Vincent Lagaffe), un des candidats doit s'élever, à l'aide d'un flyboard, à environ cinq mètres de la surface de l'eau afin d'attraper la clé suspendue dans les airs (figure 1).



FIGURE 1 – Mégagaf et son flyboard

1 — Présentation du système

Un flyboard est une plateforme sur laquelle les pieds d'un individu sont fixés et qui est composée :

- d'un tuyau de section S_e amenant jusqu'au flyboard de l'eau pompée par un jetski situé plus loin à la surface de l'eau;
- de deux tuyères de section S_s évacuant l'eau à grande vitesse vers le bas dans l'air extérieur à la pression uniforme P_0 (indépendante de z).

Dans toute la suite, on adopte les notations et la géométrie simplifiée de la figure 2 sur laquelle le tuyau central, beaucoup plus long si on respecte l'échelle, a été tronqué par aspect pratique, mais il fait partie du système.

On ne s'intéresse pas au système de pompage (jetski) et on suppose que l'eau est propulsée depuis la surface de l'eau ($z = 0$) à la vitesse \vec{v}_e et à la pression P_e .

L'eau est considérée comme un fluide parfait homogène incompressible de masse volumique μ .

On note :

- M_{eau} la masse d'eau contenue dans le dispositif flyboard (ensemble des tuyaux);
- $M = M_c + M_{\text{fly}}$ la masse de l'ensemble {candidat = flyboard (sans l'eau qu'il contient)};
- $v_e = \|\vec{v}_e\|$ la vitesse de l'eau à l'entrée du flyboard;
- $v_s = \|\vec{v}_s\|$ la vitesse de l'eau à la sortie du flyboard.

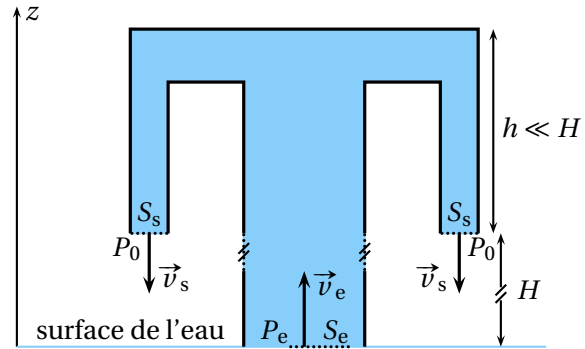


FIGURE 2 – Schématisation du flyboard

2 — Vitesse d'expulsion nécessaire à l'équilibre

1. Peut-on appliquer le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au système {candidat + flyboard + eau qu'il contient}? Justifier.

On désire effectuer un bilan de quantité de mouvement pour le système $\Sigma^* = \{\text{eau contenue dans le flyboard}\}$, en bleu et délimité par les pointillés dans la figure 2. Pour ce faire, on se place en régime stationnaire et on suppose le candidat en équilibre à l'altitude $H = 5 \text{ m}$.

2. Que signifie concrètement, pour les grandeurs v_e , v_s , S_e et S_s , le fait de se placer en régime stationnaire?
3. Définir le système fermé Σ correspondant au système ouvert Σ^* en précisant sa composition à l'instant t et à l'instant $t + dt$.
4. Rappeler la définition générale du débit volumique D_v et justifier qu'il se conserve ici le long de l'écoulement. En déduire deux expressions de D_v en fonction de v_e , v_s , S_e et S_s .
5. Effectuer le bilan de quantité de mouvement en projection sur \vec{e}_z . En notant $F \vec{e}_z$ la force exercée **par l'eau sur les parois** intérieures du flyboard, montrer que

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v^2 \alpha$$

où α est une constante dont on déterminera l'expression en fonction de S_e et de S_s .

6. Après avoir vérifié toutes les hypothèses nécessaires, appliquer le théorème de Bernoulli entre deux points à préciser afin d'exprimer P_e en fonction de P_0 , μ , g , H , D_v , S_e et S_s .
7. Déduire des trois questions précédentes que

$$F = P_0(2S_s + S_e) - M_{\text{eau}} g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \beta$$

où β est à expliciter en fonction de S_e et S_s .

La masse d'eau contenue dans le flyboard se décompose en deux parties :

- première partie : la masse d'eau contenue dans le tube d'alimentation de hauteur H et de section S_e ;
- deuxième partie : la masse d'eau contenue dans les tuyaux de la plateforme, à une distance h sous les pieds du candidat.

Puisque l'on s'intéresse à un vol stationnaire à une altitude de cinq mètres, on a $H \gg h$ et on néglige donc la masse d'eau contenue dans cette deuxième partie.

8. Donner l'expression de M_{eau} en fonction de H . En déduire une expression simplifiée de F .
9. Appliquer le PFD, toujours en projection sur \vec{e}_z au système {candidat + flyboard (sans l'eau qu'il contient)} considéré comme étant à l'équilibre à l'altitude H dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Montrer que le débit volumique $D_{v,\text{éq}}$ permettant cet équilibre s'écrit

$$D_{v,\text{éq}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu\beta}}$$

10. L'application numérique donne $D_{v,\text{éq}} = 6,0 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire les valeurs numériques de v_e et v_s à $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ près, avec $S_e = 80 \text{ cm}^2$ et $S_s = 25 \text{ cm}^2$.

3 — Puissance de la pompe

L'eau de mer est poussée vers le flyboard à travers le tube d'alimentation par la pompe d'un jetski qui pompe de l'eau à la surface de la mer (pression P_0) et l'injecte à la base du tube, lui aussi à la surface de la mer, à la pression $P_e > P_0$.

On néglige les variations d'énergie cinétique, d'énergie interne et d'énergie potentielle de pesanteur entre l'entrée et la sortie de la pompe.

On cherche à évaluer la puissance minimale de la pompe permettant la pratique du flyboard.

1 Non prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

11. En prenant $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $H = 5,0 \text{ m}$, $\mu = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et en reprenant les valeurs de la question 10 pour S_e et S_s , déterminer par un calcul d'ordre de grandeur, la bonne valeur numérique pour $\Delta P = P_e - P_0$ parmi

$$\Delta P = 0,09 \text{ bar}; \quad \Delta P = 0,9 \text{ bar}; \quad \Delta P = 9 \text{ bar}.$$

2 Prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

Le tuyau d'amenée d'eau qui va du jetski au flyboard est cylindrique. On note ℓ sa longueur et d son diamètre. Pour éviter que le tuyau ne soit tendu et retienne le sportif et pour laisser du mou au conducteur du jetski, la longueur de ce tuyau est très supérieure à la hauteur maximale que peut atteindre le flyboarder. En pratique $\ell = 20 \text{ m}$ et $d = 10 \text{ cm}$.

L'eau, de viscosité dynamique $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, y circule avec le même débit volumique qu'à la question 10, soit $D_v = 6,0 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. La rugosité absolue du tuyau, quant à elle, vaut $\varepsilon = 0,05 \text{ mm}$.

On admet que la viscosité de l'eau implique une perte de charge ΔP_c telle que la pression en entrée du tuyau est en fait $P_e + \Delta P_c > P_e$ avec

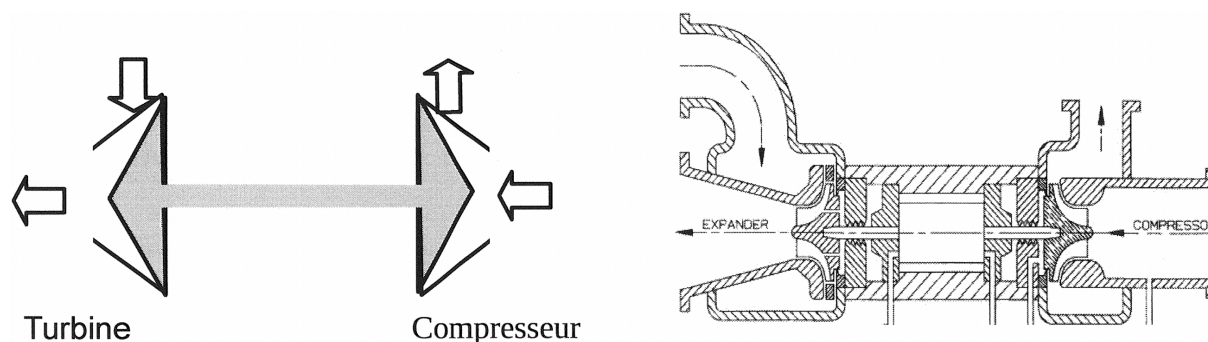
$$\Delta P_c = \frac{\mu v_e^a \ell \varepsilon^b}{K d^2} \quad \text{avec } a, b \in \mathbf{Q} \quad \text{et } K \text{ un coefficient adimensionné.}$$

12. Par analyse dimensionnelle, établir les valeurs numériques de a et de b .

13. En admettant que la puissance P_{pompe} fournie par la pompe est égale à la puissance des forces de pression, exprimer P_{pompe} en fonction de la rehausse de pression totale qu'elle procure $P_e + \Delta P_c - P_0$. On admet que l'application numérique donne $P_{\text{pompe}} = 12 \text{ kW}$.

Commenter la faiblesse de la valeur obtenue sachant que la gamme de puissance recommandée pour le jetski pilotant le flyboard est de $75 \text{ kW} - 125 \text{ kW}$.

Les calculatrices sont interdites

Document 1 : description d'un turbo-détendeur cryogénique

L'objectif de cet organe n'est pas la compression mais l'expansion du gaz à travers la turbine afin d'abaisser la température du gaz. Le design de l'admission et de la partie tournante de la turbine donnent d'abord une grande vitesse au gaz avant qu'il soit détendu par l'augmentation du volume disponible autour de l'axe. Cette détente donne un travail mécanique qu'on récupère sur l'axe et qui peut servir à compresser sur le même axe. Cette technique d'un seul et même axe est utilisée pour les turbines à gaz dans le cycle de Brayton ou dans le cycle de Joule. Le cycle de refroidissement correspondant porte donc le nom de cycle de Brayton inversé. De multiples inventions de roulements et de lubrifications ont eu lieu et permettent des vitesses de rotation très importantes à de basses températures d'utilisation.

Document 2 : description d'un cycle de Brayton inversé avec l'air pour fluide

Ce cycle utilisant l'air sert à réfrigérer un fluide à -70 °C ; il est schématisé en annexe. Les variations d'énergie potentielles et cinétiques entre chaque organe du cycle sont négligées par rapport aux variations d'enthalpie. Les compressions et le turbinage sont considérées comme isentropiques. La transmission de puissance est supposée intégrale entre turbine et compresseur. Les échangeurs sont considérés comme isobares. Le fluide utilisé est l'air qui est de température initiales -20 °C (état A) à 1,0 bar. L'air est comprimé de 1,0 bar à 10 bar de manière isentropique par deux compresseurs. Le premier compresseur est entraîné par la turbine du turbo-détendeur et amène l'air à l'état B. L'air sort à l'état C à -10 °C après avoir parcouru un échangeur alimenté au frigorigène R134a. La sortie du deuxième compresseur est l'état D à 10 bar. Ce compresseur est entraîné par un moteur électrique. L'air est ensuite refroidi à -10 °C dans un deuxième échangeur au frigorigène R134a et sort à l'état E. L'air toujours comprimé entraîne ensuite la turbine en se détendant jusqu'à 1,0 bar (état F). Pour finir, l'air en traversant deux échangeurs augmente en température. Entre la température de -140 °C et -75 °C , l'air refroidit un fluide qu'on cherche à réfrigérer à -70 °C et sort à l'état G. Ensuite l'air refroidit le fluide R134a jusqu'à revenir à l'état A. Il faut d'autre part refroidir le fluide R134a par un système complémentaire.

- Rappeler le premier principe avec l'enthalpie massique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie.
- Compléter le schéma en annexe avec les lettres des différents états du cycle.
- En utilisant le diagramme $(\log P, h)$ de l'air (R729) fourni en annexe (les isothermes sont en $^{\circ}\text{C}$, les isentropes en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), exprimer puis calculer le travail massique reçu par l'air lors de la détente isentropique $E \rightarrow F$. En déduire le travail massique reçu par l'air lors de la compression $A \rightarrow B$.
- Compléter le tableau de l'annexe, placer les points et tracer le cycle sur la diagramme $(\log P, h)$ de l'air en annexe.
- Exprimer et calculer le transfert thermique reçu par l'air en contact avec le fluide qui est à maintenir à -70 °C .
- On considère deux sources à -70 °C et -25 °C . Redémontrer, exprimer puis calculer l'efficacité de Carnot dans le cas d'une machine réversible qui refroidit la source froide grâce à du travail apporté par l'extérieur.
- En considérant que le travail du compresseur électrique soit la seule énergie dépensée, exprimer et calculer l'efficacité du cycle. Commenter.

8. Quelle dépense supplémentaire faudrait-il compter pour calculer l'efficacité du cycle?
9. Exprimer et calculer le transfert thermique massique reçu du R134a par l'air dans les trois échangeurs « R134a ». En déduire le transfert thermique total reçu par le R134a.
10. On considère une efficacité égale à 2 pour refroidir le fluide R134a par un système complémentaire afin de compenser les échanges avec l'air. Exprimer et calculer une nouvelle efficacité pour le système.

Partie III : Quelques aspects de la physique du piano (Centrale PSI 2013)

Les calculatrices sont autorisées

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIII^e siècle et perfectionné principalement au XIX^e siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XX^e siècle. Ce problème se propose d'aborder différents aspects du fonctionnement et de la conception de l'instrument. Les différentes parties sont largement indépendantes.

1 — Vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau¹, qui vient frapper une corde². Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse donc dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano.

On considérera que la corde peut être supposée sans raideur et on négligera toujours les effets de la pesanteur. La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 . Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant.

1 Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

1. Que signifie l'expression « corde sans raideur »? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements »?
2. Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir les deux équations liant les dérivées partielles par rapport à t et à x de la vitesse transversale d'un point de la corde $v_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$ et de la projection sur l'axe (Oy) de la force de tension exercée à l'abscisse x par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche $T_y(x, t)$. On fera apparaître la tension T_0 en le justifiant.
3. Montrer que la fonction $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Identifier la célérité c des ondes transversales sur la corde et en donner l'expression. Comment s'appelle cette équation? Citer au moins deux autres phénomènes régis par la même équation.

4. On peut lire dans une documentation technique que « une corde de piano est tendue à 85 kg ». Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension T_0 d'une corde?

Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm. La masse volumique de l'acier valant $7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, calculer la célérité c des ondes transversales sur la corde.

2 Modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = 0$.

5. Qu'appelle-t-on onde stationnaire? Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (1) sont de la forme $y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$. Quelle est la relation entre ω et k ?

1. Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.

2. Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.

6. Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde? Exprimer les fréquences propres f_n de la corde en fonction de c et L . Donner l'expression de la solution $y_n(x, t)$ correspondant au mode propre numéro n . Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

La solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ est une superposition des modes propres, qui s'écrit

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(n \frac{\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right).$$

La corde est frappée à l'instant initial par un marteau de largeur $2a$ (faible), situé à l'abscisse x_0 (pendant un intervalle de temps supposé infiniment court). Ce marteau communique une vitesse initiale transversale à la corde. On se donne les conditions initiales suivantes (juste après l'attaque de la corde par le marteau) en tout point de la corde :

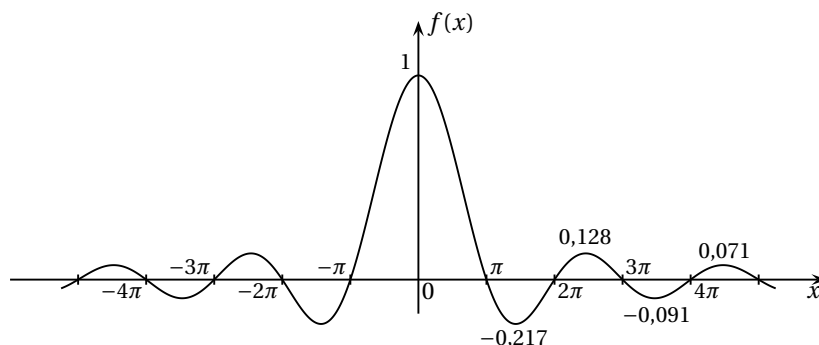
- la forme initiale de la corde donnée par $y(x, 0) = 0$;
- la vitesse initiale de la corde donnée par

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \begin{cases} u_0 & \text{pour } x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 0 & \text{en dehors de cet intervalle} \end{cases}$$

7. On donne le résultat du calcul :

$$y(x, y) = \frac{4u_0 a x_0}{cL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi a}{L}\right)}{n \frac{\pi a}{L}} \frac{\sin\left(n \frac{\pi x_0}{L}\right)}{n \frac{\pi x_0}{L}} \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n \frac{\pi ct}{L}\right)$$

On donne la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, en indiquant les valeurs approchées des premiers extrema :



Quel est l'effet de la largeur a du marteau? Pour une corde de piano de longueur $L = 65$ cm (*Do 4*, fréquence fondamentale $f_1 = 262$ Hz), donner l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle cet effet est sensible. La largeur du marteau vaut $2a = 2$ cm. Commentaire?

8. Comment choisir le point d'attaque si l'on veut supprimer l'harmonique de rang n ?

3 Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du *La 0* (fréquence fondamentale $f = 28$ Hz) au *Do 8* (fréquence fondamentale $f = 4,2$ kHz).

9. Rappeler la relation liant la longueur L d'une corde à la fréquence de son fondamental f .

On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f = 262$ Hz, on a une longueur de corde $L = 65$ cm. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu?

10. Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m).

La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée à la question 9 pour les notes au-delà du *Do 4*. Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension T_0 des cordes?

11. On donne la masse volumique du cuivre : $\rho(\text{Cu}) = 9,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension $T_0 = 850 \text{ N}$, calculer la longueur de la corde du *La 0* (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale $f = 28 \text{ Hz}$). La masse volumique de l'acier est $\rho(\text{acier}) = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Partie IV : utilisation du chlorure d'ammonium (banque PT 2024)

Les calculatrices sont interdites

Données pour l'ensemble du sujet

Les applications numériques seront réalisées avec les valeurs approchées suivantes :

$$\ln 10 \approx 2,3; \quad \frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V} \quad \text{à } 298 \text{ K.}$$

Potentiels standard d'oxydoréduction à pH = 0 et à 298 K :

	$\text{Zn}^{2+}(\text{aq})/\text{Zn}(\text{s})$	$\text{H}_2(\text{g})/\text{H}^+(\text{aq})$	$\text{Fe}^{3+}(\text{aq})/\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$	$\text{NO}_3^-(\text{aq})/\text{NO}(\text{g})$	$\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)$
$E^\circ \text{ (V)}$	-0,76	0	0,77	0,97	1,23

Constantes thermodynamique à 298 K, exprimées sous la forme $pK = -\log_{10} K$:

- produit de solubilité de $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$: $pK_s = 17$;
- produit ionique de l'eau : $pK_e = 14$.

Le chlorure d'ammonium, de formule NH_4Cl , est un solide constitué d'ions NH_4^+ et Cl^- .

Il peut être utilisé comme « sel de fond » en électrochimie. On se place à la température de travail de 298 K.

On note (S) une solution de sulfate de zinc (II) (Zn^{2+} , SO_4^{2-})(aq) à $1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, et de chlorure d'ammonium, acidifié par de l'acide sulfurique.

La figure 3 représente la courbe courant-potentiel enregistrée pour la solution (S) sur une électrode de zinc. Les ions SO_4^{2-} , NH_4^+ et Cl^- sont électro-inactifs.

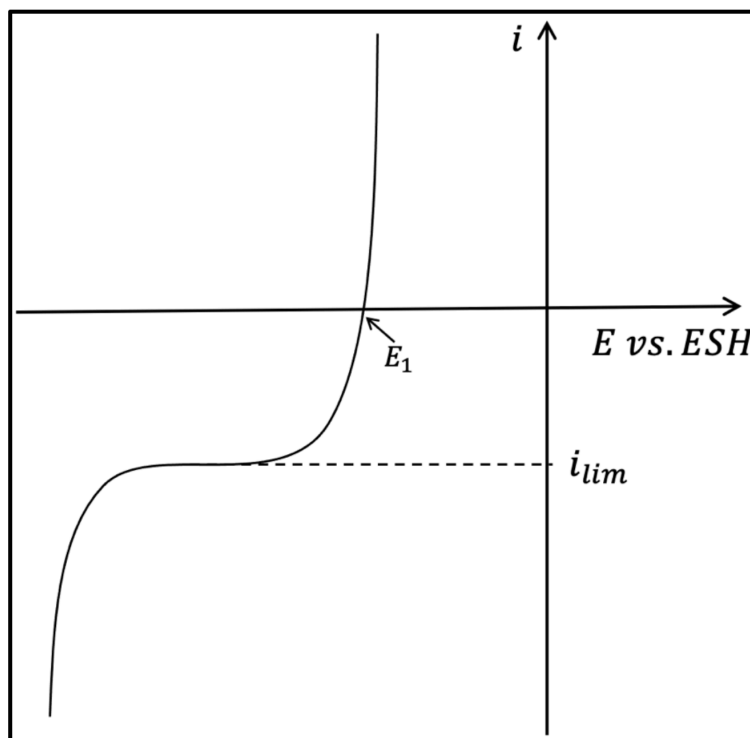


FIGURE 3 – Courbe courant-potentiel enregistrée avec la solution (S)

1. Écrire l'inégalité impliquant les concentrations $[\text{Zn}^{2+}]$ et $[\text{HO}^-]$ dans la solution (S) pour que l'on n'ait pas formation du précipité $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$. En déduire que le pH de la solution (S) doit alors être inférieur à une valeur que l'on calculera. On supposera cette condition sur le pH vérifiée pour le reste du sujet.

2. Reproduire la courbe de la figure 3 sur la copie et indiquer les processus se déroulant sur chaque section.
3. Calculer la valeur attendue pour le potentiel E_1 , défini sur la figure 3.
4. Indiquer deux grandeurs auxquelles i_{lim} , défini sur la figure 3, est proportionnel.
5. Indiquer pourquoi la courbe n'admet pas de palier de courant pour $i > 0$.

On souhaite utiliser la solution (S) pour déposer du zinc ultra-pur sur une électrode de zinc par électrolyse en utilisant également une électrode de carbone graphite.

6. Écrire la réaction électrochimique se déroulant sur l'électrode de zinc et indiquer, en justifiant, si cette dernière joue le rôle d'anode ou de cathode.
7. Schématiser le montage d'électrolyse en indiquant sans ambiguïté les branchements du générateur et le déplacement des électrons.
8. Établir l'expression de la masse m_{Zn} de zinc théoriquement déposée sur l'électrode en fonction de la masse molaire du zinc M_{Zn} , de l'intensité I du courant constant utilisé, de la durée de l'électrolyse Δt et de la constante de Faraday F .
9. En réalité, la masse obtenue expérimentalement est inférieure à celle précédemment calculée car le rendement faradique est strictement inférieur à 1. En augmentant la tension d'électrolyse, le rendement faradique diminue. Expliquer.
10. Indiquer l'intérêt d'utiliser du chlorure d'ammonium comme « sel de fond » lors de cette électrolyse.