

Les calculatrices sont autorisées pour l'ensemble de l'épreuve

Partie I : Aspects de la propulsion spatiale (d'après Mines PSI 2015)

Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ . À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $z \in \mathbb{C}$ .

L'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre est  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Ce problème s'intéresse à la propulsion d'engins spatiaux et plus particulièrement au moteur ionique, dans lequel le carburant n'est pas brûlé mais ionisé. Les ions alors libérés passent par deux grilles fortement chargées électriquement et subissent ainsi une accélération. La force d'accélération des ions cause une force de réaction de sens opposée : c'est la force de propulsion du moteur à ions.

1 — Aspect cinétique — Loi de vitesse

À l'instant  $t = 0$ , une fusée de masse totale  $m_0$  décolle verticalement dans le référentiel terrestre. On définit le débit de masse  $D_m > 0$  des gaz brûlés par

$$D_m = -\frac{dm}{dt},$$

$m(t)$  désignant la masse de la fusée à un instant  $t > 0$  quelconque.

On note  $\vec{u} = -u\hat{u}_z$  avec  $u > 0$ , la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note  $\vec{v} = v(t)\hat{u}_z$  la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On suppose que  $D_m$  et  $u$  restent constants et que le champ de pesanteur  $g$  reste uniforme lors du lancement.

1. En prenant pour système la fusée à l'instant  $t$ , exprimer sa quantité de mouvement  $\vec{p}_f$  aux instants  $t$  et  $t + dt$ . Déterminer de même la quantité de mouvement  $\vec{p}_g$  à l'instant  $t + dt$  du gaz éjecté pendant  $dt$ .
2. On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{w}(t)$  est définie par la relation

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + dt) - \vec{w}(t)}{dt}.$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée+gaz}, établir l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg. \tag{1}$$

3. Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité  $F$  de la force de poussée. À quelle condition la fusée décolle-t-elle?
4. On nomme impulsion spécifique  $I_s$  d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse  $m$  de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par  $m$  à la surface de la Terre. Exprimer  $I_s$  en fonction de  $u$  et  $g$ .
5. Déterminer l'expression de la vitesse  $v(t)$  de la fusée à l'instant  $t$ , en fonction de  $t$ ,  $m(t)$ ,  $g$ ,  $u$  et de la masse de la fusée à l'instant  $t = 0$ , notée  $m_0$ .
6. On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire); sa masse totale est alors  $m_i$  et sa vitesse  $\vec{v} = v_i\hat{u}_z$ . On allume à nouveau un moteur pendant une durée  $\Delta t$  conduisant à une variation de masse  $\Delta m = m_i - m_f$ . Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté  $\Delta V = v_f - v_i$ , en fonction de  $u$ ,  $m_i$  et  $m_f$ .

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale  $m_t = 134$  tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est  $m_{t1} = 110$  tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est  $m_{t2} = 24,0$  tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

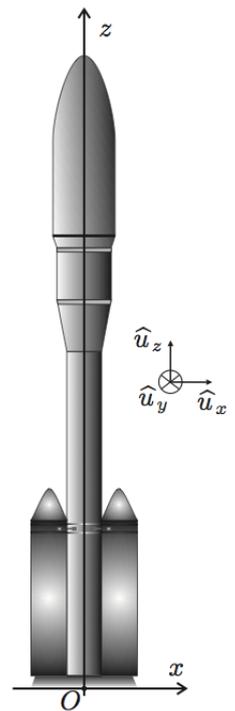


FIGURE 1 – Fusée

7. En considérant que la vitesse d'éjection des gaz  $u = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masse, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

8. Pour une charge utile de masse  $m_u = 550 \text{ kg}$ , calculer les masses  $m_{c1}$  et  $m_{c2}$  de carburant (la masse initiale du vaisseau est  $m_0 = m_u + m_c$ ) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse  $\Delta V = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , dans le cas d'une propulsion chimique ( $u = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et d'une propulsion ionique ( $u = 20,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

## 2 — Aspect énergétique — Rendement propulsif du moteur fusée

9. Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme  $v$  dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse  $dm$  du gaz éjecté pendant  $dt$ . En déduire la puissance cinétique  $P_{\text{jet}}$  contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de  $D_m$ ,  $u$  et  $v$ .

10. On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

où l'on précisera l'expression de  $x$  en fonction des données du problème.

11. Tracer la courbe  $\eta(x)$ . Pour quelle valeur de  $x$  le rendement propulsif est-il maximal? Pour quelles valeurs de  $x$  le rendement est-il nul? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergie de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

## 3 — Étude de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la fusée

On considère ici la fusée se déplaçant librement dans l'espace : elle n'est plus soumise au champ de pesanteur ou au champ gravitationnel terrestre.

12. Que devient l'équation (1)? En déduire l'expression de la composante  $v(t)$  au cours du temps en fonction de  $u$ ,  $m(t)$  et  $m_0$ , masse de la fusée à  $t = 0$ . On pourra réutiliser les calculs faits à la question 5.

On considère la masse de fusée « à vide »  $m_f \ll m_0$ . On pose  $r = \frac{m(t)}{m_0}$  la fraction de masse restante de la fusée à l'instant  $t$ . Dans ce modèle  $r$  varie de  $r = 1$  initialement à  $r \rightarrow 0$  quand tout le gaz a été expulsé.

13. Exprimer la quantité de mouvement  $p$  de la fusée<sup>1</sup> à l'instant  $t$  en fonction de  $u$ ,  $m_0$  et de la masse  $m$  de la fusée à cet instant.

Pour quelle valeur  $m_p$  de  $m$  la quantité de mouvement de la fusée est-elle maximale? Exprimer alors  $p_{\text{max}}$  en fonction de  $m_0$  et  $u$ .

14. Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$  de la fusée à l'instant  $t$  en fonction de  $u$ ,  $m_0$  et de la masse  $m$  de la fusée à cet instant.

Pour quelle valeur  $m_c$  de  $m$  l'énergie cinétique est-elle maximale? Exprimer alors  $E_{c,\text{max}}$  en fonction de  $m_0$  et  $u$ .

15. Représenter sur le même graphe les évolutions de  $v$ , de  $p$  et de  $E_c$  en fonction de la fraction de masse restante de la fusée  $r = m/m_0$ . On utilisera des échelles arbitraires pour les ordonnées.

16. On souhaite dévier un astéroïde au repos en envoyant une fusée dessus, afin de le percuter dans une collision parfaitement inélastique : la fusée reste « collée » à l'astéroïde, et la quantité de mouvement totale de l'ensemble {fusée + astéroïde} est conservée lors de la collision.

Est-ce une bonne idée de programmer la collision quand la fusée aura atteint la plus grande valeur de sa vitesse? Pourquoi?

Pour quelle valeur du rapport  $r = m/m_0$  faut-il que la fusée percute l'astéroïde pour lui communiquer la plus grande déviation?

17. On souhaite maintenant détruire un astéroïde au repos en envoyant la fusée le percuter. Pour quelle valeur du rapport  $r = m/m_0$  faut-il que la fusée rencontre l'astéroïde pour faire le plus de dégâts?

1. On considère la quantité de mouvement de la fusée et des gaz qu'elle contient à cet instant, sans prendre en compte les gaz déjà éjectés.

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à  $p = 155 \text{ bar}$ , puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

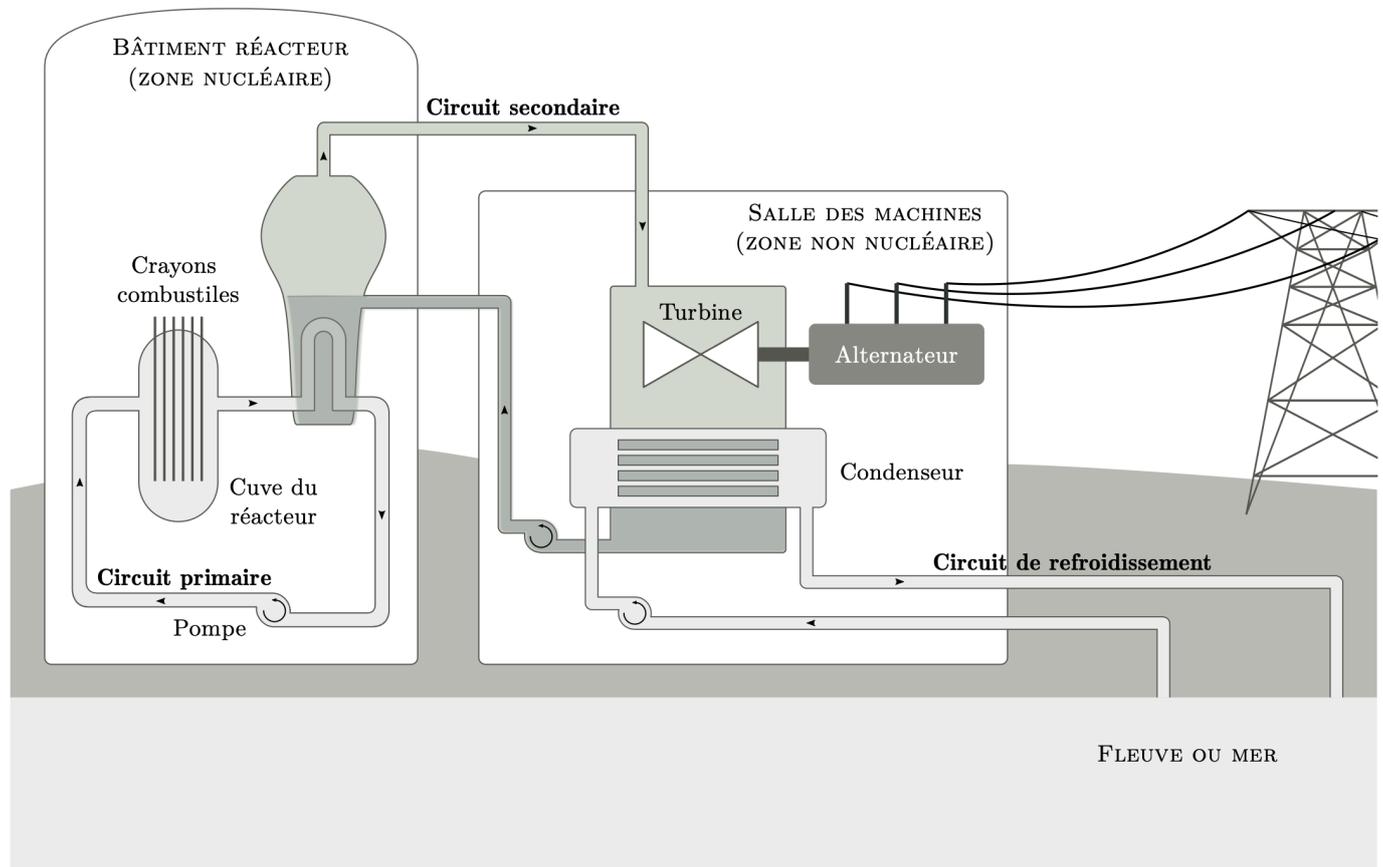


FIGURE 2 – Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF.

On se propose d'étudier le circuit secondaire.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Un formulaire et certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.

## 1 — Préliminaire

On considère un fluide en écoulement stationnaire, sans variation notable de son énergie mécanique, dans une machine. Il y entre dans l'état E (pression  $p_e$ , température  $T_e$ , enthalpie massique  $h_e$ ) et en sort dans l'état S (pression  $p_s$ , température  $T_s$ , enthalpie massique  $h_s$ ). On note  $w_u$  le travail utile massique et  $q$  le transfert thermique massique reçus algébriquement par le fluide lors de la traverse de la machine.

- Établir soigneusement la relation vérifiée dans ce cas par  $h_s - h_e$ ,  $w_u$  et  $q$ .

## 2 — Cycle de Hirn

On considère le circuit secondaire, décrit par la figure 3 :

- la pompe d'alimentation porte l'eau liquide juste saturée (état 0) de la basse pression  $p_3 = 0,04$  bar du condenseur à la pression  $p_2 = 85,8$  bar du générateur de vapeur (GV) de façon isentropique (état 1);
- l'eau liquide entre ensuite dans le générateur de vapeur, où elle est chauffée de façon isobare jusqu'à la température  $T_2$  du changement d'état (état 1' — liquide juste saturant), puis est totalement vaporisée jusqu'à l'état 2 (vapeur saturante sèche). Le surchauffeur (2 — 2') fonctionne de façon isobare;
- la vapeur sèche produite (état 2') subit ensuite une détente isentropique dans une turbine calorifugée amenant le système dans l'état 3, à la température  $T_0$ ;
- le mélange diphasé (état 3) pénètre ensuite dans le condenseur pour y être totalement condensé (état 0).

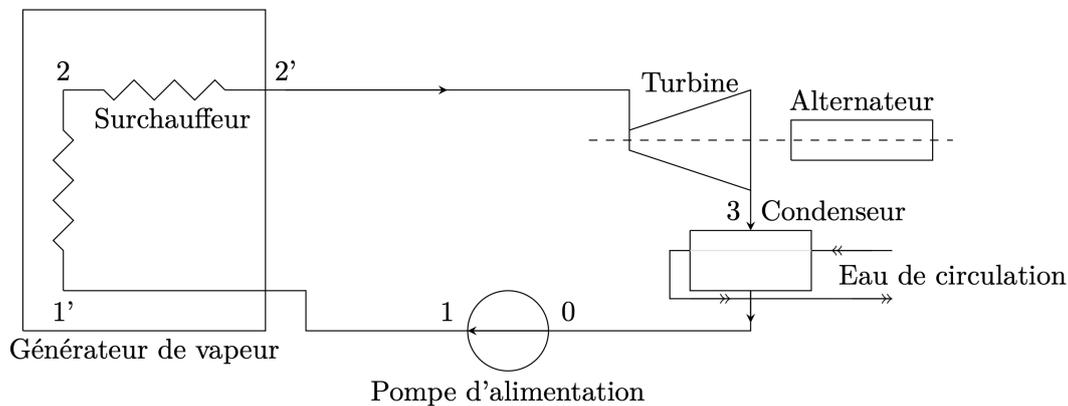


FIGURE 3 – Cycle de Hirn

On se place en régime stationnaire. On suppose l'eau liquide incompressible et on néglige le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation.

Dans la suite, les grandeurs thermodynamique indicées par  $i$  sont relatives à l'état  $i$ .

On donne  $T_0 \approx T_1 = 29$  °C,  $T_2 = 300$  °C et  $T_{2'} = 500$  °C, ainsi qu'un extrait de tables thermodynamiques pour l'eau sur le tableau 1. Les données suivantes sont également fournies :

- chaleur latente massique de vaporisation de l'eau à  $T_2$  :  $L_v(T_2) = 1404$  kJ · kg<sup>-1</sup>;
- enthalpie et entropie massiques respectives de la vapeur d'eau sèche à 500 °C et 85,5 bar :  $h = 3391$  kJ · kg<sup>-1</sup> et  $s = 6,68$  kJ · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>.

Pression de vapeur saturante (bar)	Température (°C)	Liquide juste saturé		Vapeur saturante sèche	
		$s$	$h$	$s$	$h$
85,8	300	3,25	1345	5,70	
0,040	29	0,42	121	8,47	2554

TABLEAU 1 – Quelques données thermodynamiques pour l'eau. L'enthalpie massique  $h$  est exprimée en kJ · kg<sup>-1</sup> et l'entropie massique en kJ · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>

- Expliquer pourquoi  $T_0 \approx T_1$  et  $h_0 \approx h_1$ . Préciser l'allure d'une transformation isentropique dans le domaine liquide du diagramme des frigoristes ( $p, h$ ).
- Donner le nom des différentes courbes du diagramme des frigoristes ( $p, h$ ) du document réponse 1 et y représenter précisément le cycle décrit par le fluide.
- Calculer, à partir de données du tableau 1 pour plus de précision, le titre massique en vapeur ainsi que l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine. Positionner le point représentatif de cet état sur le diagramme des frigoriste du document réponse 1.
- Définir et calculer l'efficacité  $\eta$  de ce cycle.
- Établir l'expression de l'efficacité du cycle de Carnot  $\eta_C$  d'une machine cyclique ditherme fonctionnant en moteur entre une source chaude à la température  $T_c$  et une source froide à la température  $T_f$ . La calculer en prenant respectivement pour  $T_f$  et  $T_c$  les températures minimale et maximale du fluide dans le circuit secondaire. Commenter en justifiant l'écart éventuel avec la valeur de l'efficacité obtenue à la question précédente.

### 3 — Cycle à double surchauffe

Les gouttes d'eau liquide peuvent endommager la turbine. Aussi est-il avantageux d'utiliser une turbine à deux corps permettant d'obtenir un titre massique en vapeur en sortie de turbine proche de 1 grâce à une double surchauffe. Le cycle de Hirn précédent est modifié :

- de l'eau (état 1) est admise dans le générateur de vapeur (GV) d'où elle sort à l'état de vapeur saturante sèche (état 2) ;
- elle passe ensuite dans le premier surchauffeur isobare (2 – 2'), pour être détendue dans la turbine haute pression (HP) (2' – 4) ;
- la vapeur sèche (état 4) est envoyée dans un second surchauffeur isobare (4 – 4') pour être ensuite détendue dans l'étage de turbine basse pression (BP) (4' – 5). Le titre massique en vapeur dans l'état 5 est sensiblement égal à 1 ;
- le fluide dans l'état 5 se condense totalement à la température  $T_0$  dans le condenseur isobare (5 – 0) ;
- le liquide juste saturé (état 0) est ensuite comprimé de façon isentropique à la pression  $p_2$  du générateur de vapeur (état 1).

Les détentes dans les turbines, calorifugées, sont supposées isentropiques. On se place encore une fois en régime stationnaire et on a toujours  $T_0 \approx T_1 = 29 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_{2'} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ . De plus,  $T_4 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_{4'} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ .

7. Représenter précisément le cycle décrit par le fluide dans le diagramme des frigorigistes du document réponse 1. Définir et calculer l'efficacité de ce cycle.

### 4 — Cycle réel d'une tranche nucléaire

Pour des raisons technologiques, des limitations de pression et de température interviennent directement dans le choix des caractéristiques du cycle eau-vapeur de ces centrales thermiques nucléaires, d'où des cycles moins « poussés » que dans les centrales thermiques classiques.

Le cœur du réacteur est réfrigéré et modéré par l'eau, laquelle vient se refroidir dans les échangeurs principaux (appelés générateurs de vapeur). Les mélangeurs ou réchauffeurs sont notés R1, R2, R3, R4, R5 et R6 (figures 4). On se place toujours en régime stationnaire.

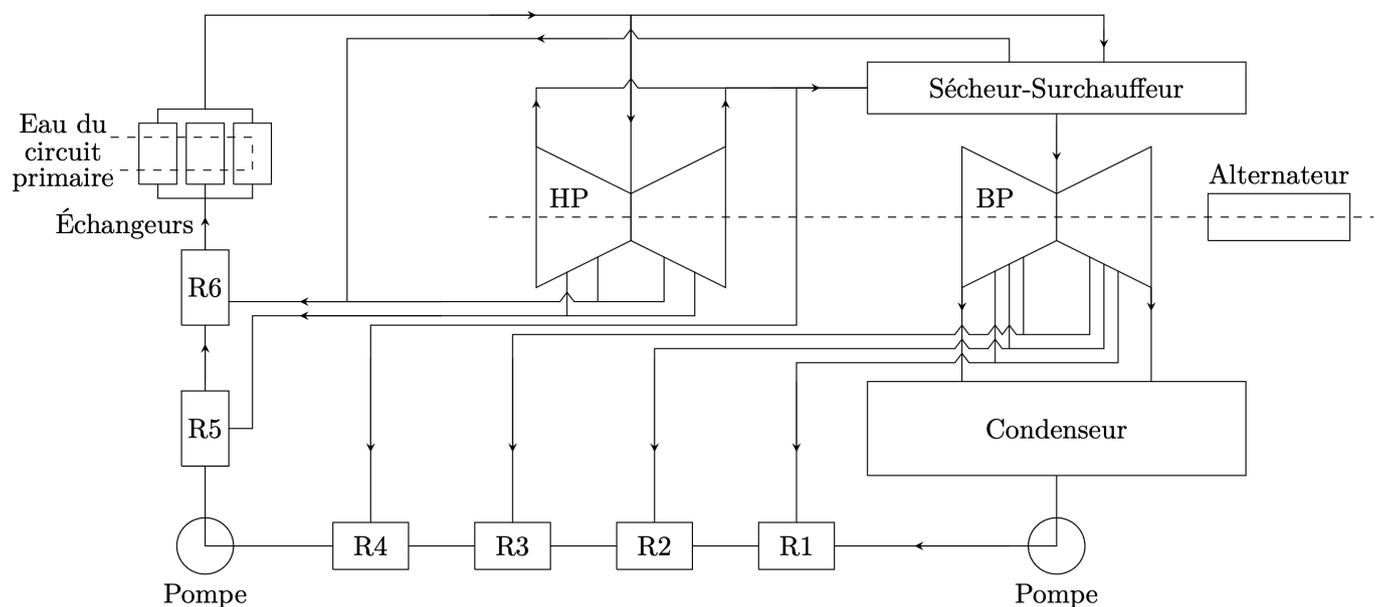


FIGURE 4 – Schéma simplifié du circuit eau-vapeur d'une centrale nucléaire

8. Calculer l'efficacité du cycle en vous appuyant notamment sur les caractéristiques thermodynamiques du cycle fournies dans le tableau 2. En déduire la puissance disponible aux bornes de l'alternateur. En réalité, cette puissance disponible n'est que de 960 MW : proposer une explication.

Eau du circuit	Débit massique (t·h <sup>-1</sup> )	Température (°C)	Pression (bar)	Enthalpie massique (kJ·kg <sup>-1</sup> )
Eau sortie condenseur		32,5	0,050	136,0
Eau sortie réchauffeur 4		181,1		768,0
Eau sortie réchauffeur 5		181,7		772,2
Eau entrée échangeurs principaux	5412,1	219,3	60	941,7
Vapeur sortie échangeurs principaux	5412,1	268,7	54	2788,4
Vapeur admission turbine HP	5001,9	266,4	52	2787,1
Vapeur alimentant le sècheur surchauffeur	403,7	266,4	52	2787,1
Vapeur soutirage 6 sortie turbine HP	214,3	223,3	26	2682,5
Vapeur soutirage 5 sortie turbine HP	208,4	203,4	17,6	2622,6
Vapeur soutirage 4 sortie turbine HP	402,1	183,8	11,5	2562,8
Vapeur à l'échappement de la turbine HP	4177,1	183,8	11,5	2562,8
Vapeur admission turbine BP	3704,0	264,1	11,2	2970,4
Vapeur soutirage 3 sortie turbine	281,4	137,8	3,6	2731,5
Vapeur soutirage 2 sortie turbine	235,4	97,4	0,97	2538,9
Vapeur soutirage 1 sortie turbine	134,2	60,8	0,22	2377,8
Vapeur entrée condenseur (en provenance de la turbine BP)	3053,0	32,9	0,050	2242,2

TABLEAU 2 – Caractéristiques thermodynamiques du cycle

### Formulaire et données

Variation d'entropie d'une phase condensée incompressible de capacité thermique  $C$  entre un état 1 et un état 2 :

$$\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Coordonnées du point critique de l'eau :  $T_c = 374$  °C,  $p_c = 221$  bar.

## 1 — Le Millenium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons, on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de prêtres, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui curent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\vec{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ .

À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $z \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .



### 1 Système élastique continu

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus, mais d'un point de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discrétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique  $\rho$  constante, qui a la forme d'un cylindre de section  $S$  et d'axe  $(O, \vec{u}_x)$  horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme  $F$  de la force de traction permettant à un solide de longueur  $L$  de s'allonger de  $\Delta L$  est donné par la loi de Hooke :  $F = ES \frac{\Delta L}{L}$ , où  $E$  est une constante appelée module d'Young du matériau.

1. Quelle est l'unité d'un module d'Young? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

2. On note  $X(x, t)$  le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse  $x$ . Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos  $dx$  et en déduire la force de traction  $\vec{F}(x, t) = F(x, t) \vec{u}_x$  exercée par la partie « droite » (du côté des  $x$  croissants) sur la partie « gauche » (du côté des  $x$  décroissants) en fonction de  $E$ ,  $S$  et  $\frac{\partial X}{\partial x}$ . Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur  $dx$  et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $X(x, t)$ .

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle on introduit un axe vertical dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_y$  et on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant  $t$  par une ligne d'équation  $y(x, t)$  de masse linéique  $\mu$  uniforme.

En un point  $M(x, y)$  de la passerelle, on définit le vecteur unitaire tangent  $\vec{u}_r$  à la passerelle tel que

$$\vec{u}_r(x, t) = \cos[\alpha(x, t)] \vec{u}_x + \sin[\alpha(x, t)] \vec{u}_y.$$

Les déplacements sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant  $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \ll 1$ . Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé

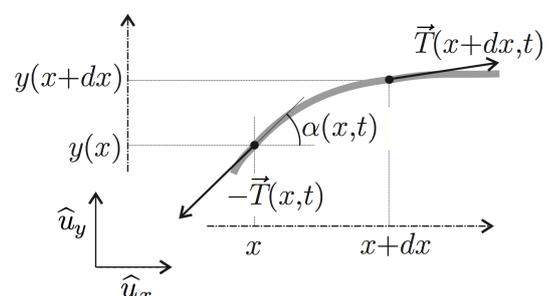


FIGURE 5 – Tronçon de corde élastique

que selon la verticale. En chaque point  $M(x, y)$  de la passerelle règne à chaque instant une tension  $\vec{T}(x, t)$  portée par  $\vec{u}_r$ . Un tronçon de corde est représenté sur la figure 5.

3. En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension est indépendant de  $x$ . On le notera  $T_0$ .

4. Montrer alors que l'on peut écrire  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  où l'on exprimera  $c_\ell$  en fonction de  $T_0$  et  $\mu$ .

## 2 Modèle de la poutre élançée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur  $b$  selon  $(O, \vec{u}_z)$  et de hauteur  $h$  selon  $(O, \vec{u}_y)$ . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire  $y(x)$  très petit devant  $h$  ou  $b$ , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section  $S$ , de masse volumique  $\rho$ , de module d'Young  $E$  et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  est  $I = \frac{1}{12}bh^3$ . L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

5. On cherche des solutions sous la forme  $y(x, t) = f(x)g(t)$ . De quel type d'onde s'agit-il? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure?

6. Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $f(x)$  et  $g(t)$ . En déduire que  $g(t)$  est une fonction périodique de pulsation  $\omega$  constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution  $y(x, t)$  correspondant à la situation étudiée?

7. Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes d'intégration. On précisera l'expression de  $\beta$  en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur  $L$  en appui simple à ses extrémités; les conditions aux limites s'écrivent alors

$$y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0,t} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=L,t} = 0.$$

8. Déterminer les pulsations propres  $\omega_n$  de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de  $L$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $\rho$ ,  $S$  et d'un entier  $n$  caractérisant le mode.

9. Différents modes de vibration d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6. Quels sont ceux correspondant à l'étude proposée dans cette section? Identifier de façon argumentée, pour chacun de ces modes, l'entier  $n$  le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur  $h = 1,07$  m (42 pouces) et de largeur  $b = 4$  m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de longueurs  $L_1 = 70$  m,  $L_2 = 144$  m et  $L_3 = 108$  m. On donne la masse volumique de l'aluminium  $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et son module d'Young  $E = 69 \times 10^9 \text{ SI}$ .

10. Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale c'est-à-dire dans le sens de la largeur  $b$ . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

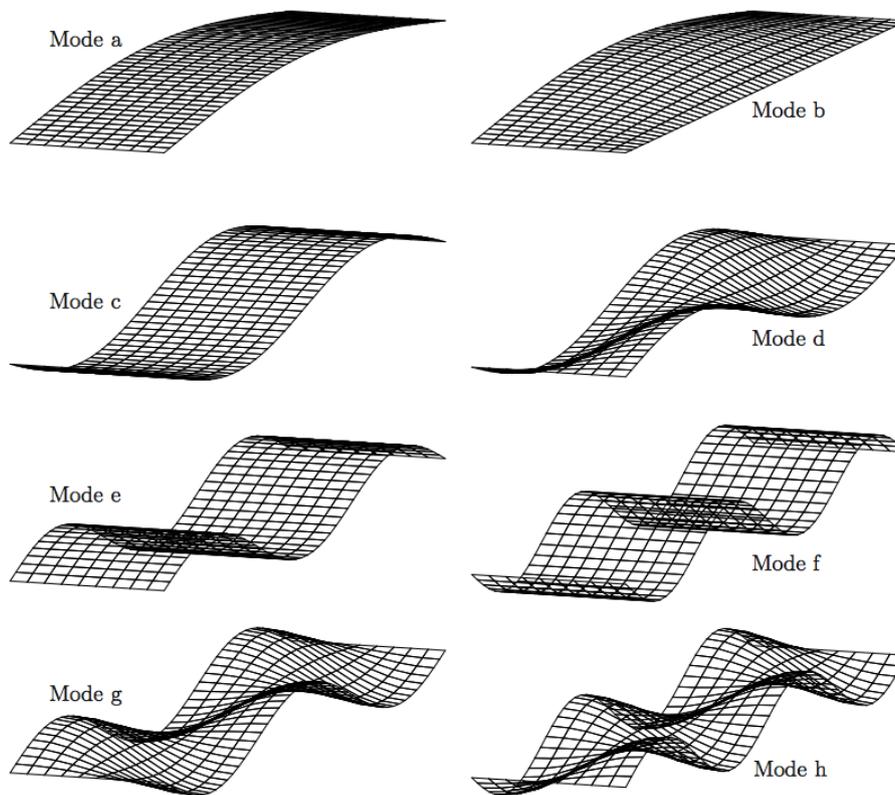


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités

### Partie IV : la sonde de Clark (Centrale PSI 2006)

Dans cette partie, tous les calculs seront effectués à 25 °C.

Données :

$$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$$

Potentiel standard :  $E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = 0,80 \text{ V}$

Produit de solubilité :  $K_s(\text{AgCl(s)}) = 2,1 \times 10^{-11}$

Masses molaires :  $M(\text{K}) = 39 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;  $M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

La sonde de Clark est très utilisée en biologie afin de mesurer la teneur en dioxygène dans le sang.

Elle est constituée d'une cellule contenant une solution non saturée de chlorure de potassium KCl à  $175 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ , séparée d'une solution extérieure (qui peut être du sang) par une membrane de polytétrafluoroéthylène (PTFE). Cette membrane est imperméable au solvant et aux ions, mais elle est perméable au dioxygène. La sonde est également constituée d'une électrode d'argent et d'une électrode de platine entre lesquelles on applique une différence de potentiel de 0,7 V. La mesure de l'intensité  $I$  du courant d'électrolyse permet de déterminer la teneur en dioxygène dans la solution extérieure.

1. Calculer la concentration en ion chlorure dans la cellule. En déduire la concentration en ion  $\text{Ag}^+$  permettant d'obtenir le précipité de chlorure d'argent  $\text{AgCl(s)}$ .
2. Au niveau de l'électrode d'argent, on assiste à l'oxydation du couple  $\text{AgCl(s)}/\text{Ag(s)}$ .  
Au niveau de l'électrode de platine, on assiste à la réduction du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ .  
Écrire les demi-équations électroniques correspondantes. Préciser l'anode et la cathode.

Le graphe de la figure 8 donne les courbes courant-potentiel des deux électrodes de la sonde de Clark.

3. Identifier les électrodes correspondant aux courbes (1) et (2).
4. Calculer le potentiel standard du couple  $\text{AgCl}/\text{Ag}$ . En déduire le potentiel d'équilibre de l'électrode d'argent. Cette valeur est-elle conforme à la courbe courant-potentiel?
5. Pour une différence de potentiel de 0,7 V, calculer l'intensité  $I$  de la sonde.

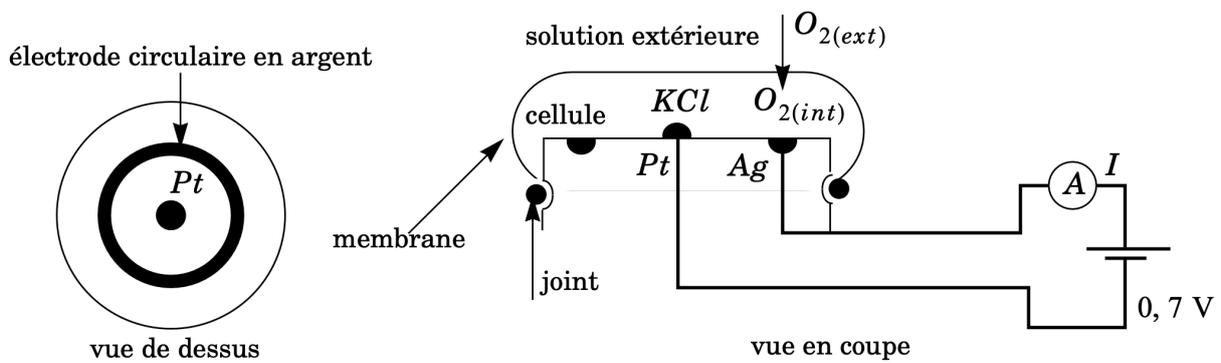


FIGURE 7 – Structure de la sonde de Clark

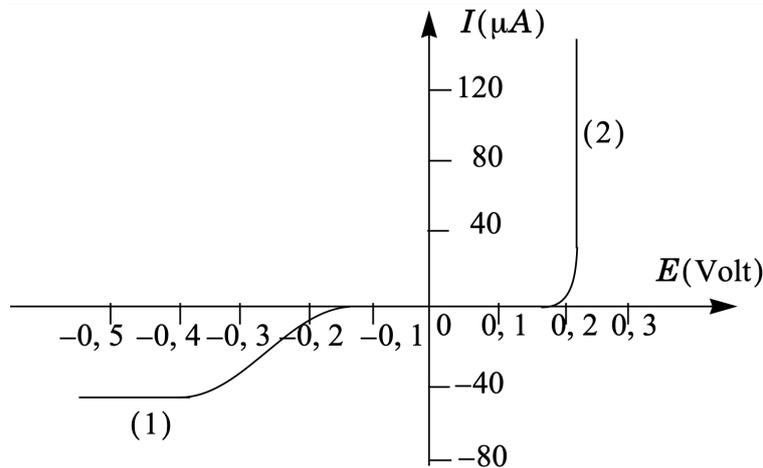


FIGURE 8 – Courbes courant-potential des électrodes de la sonde de Clark

6. D'après les courbes courant-potential, expliquer pourquoi la diffusion du dioxygène à travers la membrane limite la cinétique de l'électrolyse.

On s'intéresse plus particulièrement à la diffusion du dioxygène à travers la membrane. On note  $D$  le coefficient de diffusion moléculaire du dioxygène à travers la membrane, et  $K$  la constante de solubilité de  $O_2$  dans la membrane. Au niveau de l'interface membrane/solution, on a ainsi

$$[O_2]_{\text{membrane}} = K[O_2]_{\text{solution}}.$$

7. On note  $\delta$  l'épaisseur de la membrane et  $S$  sa surface. Rappeler la loi de Fick dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle. En déduire l'expression  $I_n$  du courant particulaire dans la membrane.

8. En supposant que la diffusion de  $O_2$  à travers la membrane limite la cinétique de l'électrolyse, exprimer l'intensité d'électrolyse  $I$  en fonction notamment des concentrations molaires en  $O_2$  dans la solution extérieure et dans la cellule, notées respectivement  $[O_2]_{\text{ext}}$  et  $[O_2]_{\text{int}}$ .

9. L'intensité d'électrolyse est maximale pour  $[O_2]_{\text{int}} = 0$ . En déduire comment la mesure de  $I_{\text{max}}$  permet de connaître la teneur en  $O_2$  dans la solution extérieure.

10. On note  $U$  la différence de potentiel appliquée aux bornes de la sonde. Tracer l'allure du graphe de  $I(U)$  pour  $U$  compris entre 0 et 0,7 V.

11. Pourquoi ne faut-il pas appliquer une différence de potentiel trop faible pour pouvoir déterminer la teneur en  $O_2$  ?

12. Pourquoi ne faut-il pas appliquer une différence de potentiel très supérieure à 0,7 V ?