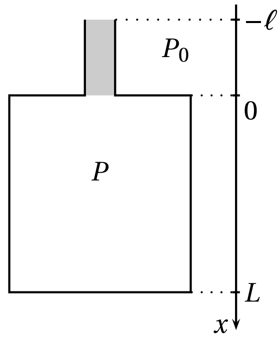
Sujet d'entraînement Ondes n° 1

Autour du résonateur de Hemlholtz — type Centrale

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.



On a tous fait l'expérience de souffler sur le goulot d'une bouteille vide : on entend alors un son de hauteur constante. On constate que l'on peut faire varier la hauteur du son en modifiant le volume d'air de la bouteille en la remplissant plus ou moins de liquide.
Pour étudier le phénomène, on modélise la bouteille par un récipient de section S et de hauteur L (de volume $V = S \times L$), le goulot étant modélisé par un cylindre de section σ et de longueur ℓ.
L'air est considéré comme un gaz parfait, de masse volumique μ_0 et d'indice adiabatique $\gamma = C_p/C_v$. La pression atmosphérique est P_0.

1 — Mouvement de l'air contenu dans le goulot

Une première étude simplifiée consiste à étudier le mouvement de l'air contenu dans le goulot.
On considère que la masse m d'air dans le goulot (en gris sur le schéma) peut se déplacer selon Ox sous l'effet des forces de pression de part et d'autre (on néglige son poids).

1. Justifier qualitativement que cette masse est soumise à une force de rappel. Que peut-on dire alors de son mouvement ?

2. On note $x(t)$ le déplacement de la masse d'air du goulot par rapport à sa position d'équilibre.
On considère que l'air contenu dans la bouteille, assimilé à un gaz parfait, subit une évolution adiabatique réversible.
Exprimer la pression $P(x)$ dans la bouteille en fonction de P_0, σ, V, γ et x.

3. Montrer que dans le cas d'un mouvement de faible amplitude, la masse d'air du goulot vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\gamma \sigma^2 P_0}{mV} x = 0 .$$

Exprimer la fréquence f_0 de son mouvement, en fonction de σ, V, ℓ et de la vitesse du son dans l'air $c = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\mu_0}}$.
Comment évolue la hauteur du son obtenu en soufflant devant le goulot de la bouteille quand on ajoute de l'eau dans la bouteille ?

4. Vous êtes sous un bar (dans votre état standard donc) après avoir commandé trois demis (les deux autres seront pour l'année prochaine). Les trois bouteilles ont le même volume V.
Bouteille 1 : vide.
Bouteille 2 : au trois-quart pleine.
Bouteille 3 : vide, mais son goulot est 4 fois plus long.
Comparer les fréquences des sons émis par les bouteilles quand on souffle devant leur goulot.

2 — Ondes acoustiques dans la bouteille

Une étude plus complète consiste à s'intéresser aux ondes acoustiques dans la bouteille et de goulot.
On considère des ondes planes progressives harmoniques se propageant selon l'axe Ox.

5. Rappeler l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression pour une onde unidimensionnelle selon Ox. On notera c la célérité.
Dans le cas d'une onde de surpression se propageant dans le sens des x croissants, donnée en notation complexe par

$$\underline{p}_1(x,t) = \underline{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} ,$$

établir alors la relation de dispersion en ω et c.

6. Dans le cadre de l'approximation acoustique, rappeler l'expression de l'équation de la dynamique linéarisée.

7. Montrer que la vitesse associée à l'onde de surpression de la question 5 s'écrit

$$\underline{\vec{v}}(x,t) = \underline{v}(x,t)\,\vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \underline{v}(x,t) = \frac{\underline{p}_1(x,t)}{Z},$$

où l'on précisera l'expression de la constante Z en fonction de μ_0 et c.. Quel est son nom ?
Que devient la relation précédente dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x décroissants ?

Lorsque l'on souffle au niveau du goulot (en $x = \ell$), on engendre une onde progressive dans le sens des x croissants (vers le bas sur la figure), décrite en notation complexe par la surpression

$$\underline{p}_1(x,t) = \underline{a}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} \quad \text{pour } -\ell < x < 0.$$

L'onde acoustique régnant dans le goulot et dans la bouteille est décrite par une onde de surpression sous la forme

$$\underline{p}_1(x,t) = \begin{cases} \underline{a}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \underline{a}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx)} & \text{pour } -\ell < x < 0 \\ \underline{A}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \underline{A}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx)} & \text{pour } 0 < x < L \end{cases}$$

8. Interpréter physiquement chacun des 4 termes de cette onde.

9. En déduire l'expression de la composante $\underline{v}(x,t)$ de l'onde de vitesse $\underline{\vec{v}}(x,t) = \underline{v}(x,t)\,\vec{e}_x$ dans le goulot et dans la bouteille.

10. Expliciter la condition à la limite en $x = L$ en une condition portant sur la vitesse ou la surpression acoustique. Même question en $x = -\ell$.

On admet qu'à l'interface entre le corps de section S et le goulot de section σ, en $x = 0$, on a :

— continuité de la surpression ;

— continuité du débit volumique.

11. Écrire le système de 4 équations vérifiées par les amplitudes $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$.

12. En déduire que le nombre d'onde k vérifie l'équation

$$\tan(kL) = \alpha\,\mathrm{cotan}(k\ell) \tag{1}$$

où α est une constante que l'on exprimera en fonction de S et σ.

13. Déterminer les valeurs de k possible dans le cas où la bouteille n'a pas de col et est fermée ($\sigma = 0$). Était-ce prévisible ?
Même question dans le cas où la bouteille est entièrement ouverte, de longueur L (soit $\sigma = S$ et $\ell = 0$).

14. À partir d'une étude graphique, discuter des valeurs de k permises par l'équation (1).

15. Dans le cas où les dimensions de la bouteilles sont petites par rapport à la longueur d'onde, comment peut-on approximer l'équation (1) ?
En déduire la ou les valeur(s) de k possible(s). Commenter le résultat obtenu.
On réalise une expérience avec un bouteille de vin partiellement remplie, dont les caractéristiques sont :

— rayon et longueur du goulot $r = 9$ mm et $\ell = 8{,}5$ cm ;

— rayon et longueur du corps de la bouteille $R = 3{,}5$ cm et $L = 10$ cm.

Le son émis a pour fréquence $f = 150$ Hz. Discuter du modèle.
L'hypothèse faite au début de cette question quant à la longueur d'onde est-elle valide ?

3 — Une expérience

On met en œuvre l'expérience suivante : un GBF, délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f, alimente un haut-parleur placé devant l'ouverture d'une bouteille [1] ; faisant varier f, il mesure la tension délivrée par un petit microphone placé *à l'intérieur* de la bouteille.
Le schéma de l'expérience ainsi que l'amplitude du signal délivrée par le microphone sont donnés figure II-1

1. Les dimensions de cette bouteilles sont différentes de celles de la bouteille utilisée pour l'application numérique de la question 15.

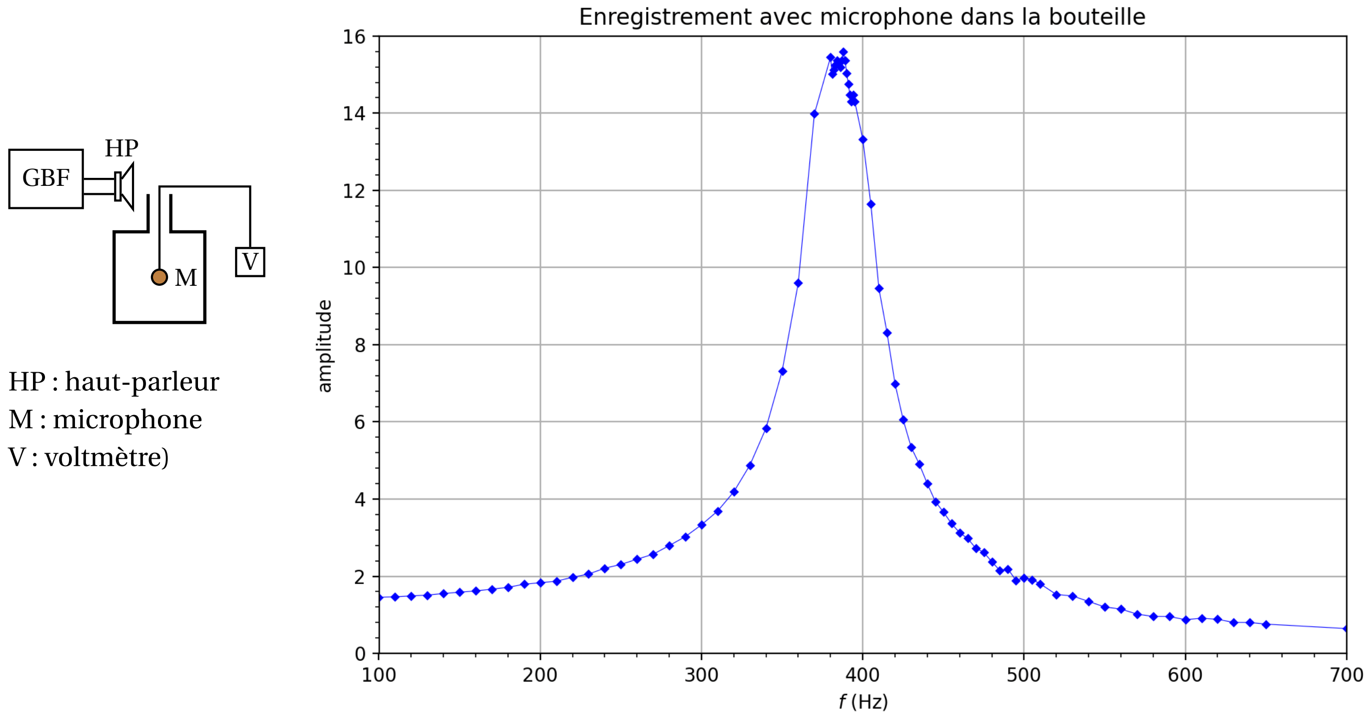


FIGURE II-1 – Enregistrement du son dans la bouteille

16. Le modèle précédent est-il compatible avec ces résultats ?
Comment pourrait-on l'améliorer ?
Déduire des mesures le facteur de qualité Q du système.

17. On modifie le dispositif expérimental comme suit : la bouteille est toujours placée devant le haut-parleur, mais le microphone n'est plus dans la bouteille ; il est placé devant le haut-parleur et la bouteille.
Le schéma de l'expérience ainsi que l'amplitude du signal délivrée par le microphone sont donnés figure II-2

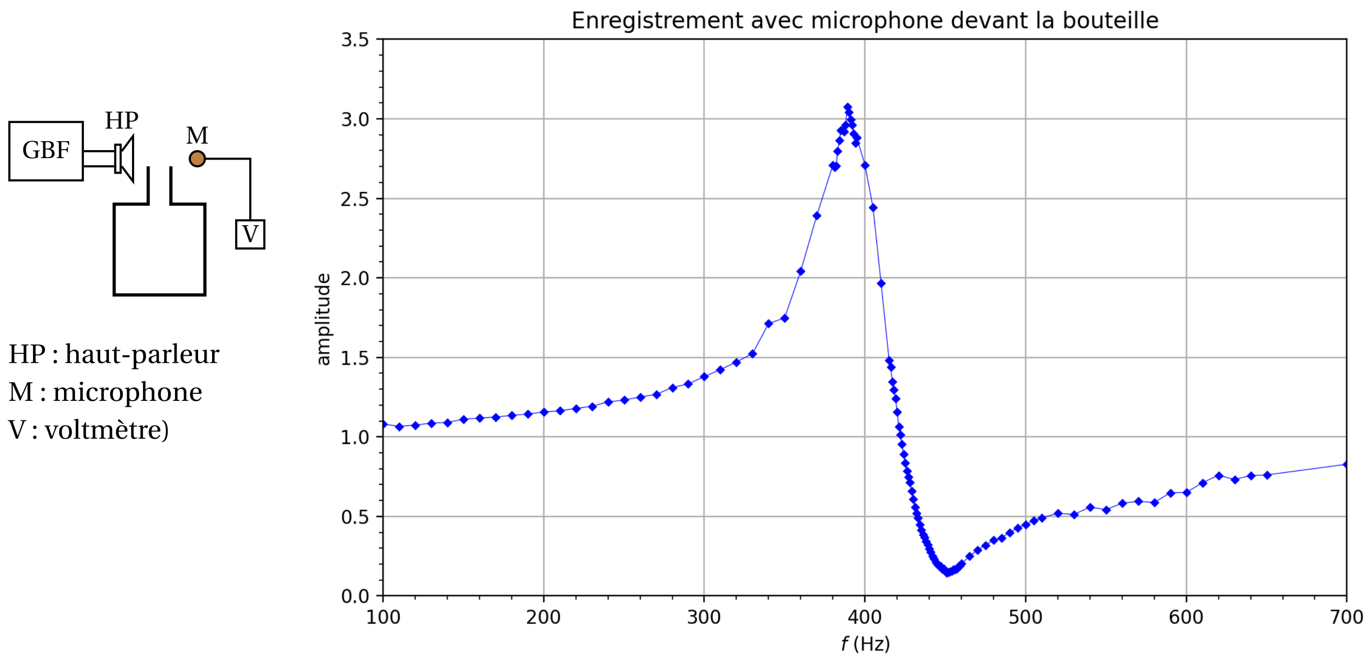


FIGURE II-2 – Enregistrement du son devant la bouteille

Proposer une explication des différences observées avec la courbe obtenue quand le microphone est dans la bouteille.