Physique des ondes **II — Ondes sonores dans les fluides**

Onde sonore ou onde acoustique

Une onde sonore — ou onde acoustique — est une onde **longitudinale** de pression, se propageant dans un milieu matériel.

- Une onde sonore ne peut se propager dans le vide.
- Une onde sonore peut être décrite comme une onde de déplacement de très faible amplitude (micrométrique).
- Le milieu de propagation peut être solide ou fluide.
- Les fréquences audibles sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz.
  Les fréquences inférieures à 20 Hz sont les **infrasons**; les fréquences supérieures à 20 kHz les **ultrasons**.

Approximation acoustique

On utilise le formalisme eulérien.

champ eulérien	pression	vitesse	masse volumique
en l'absence d'onde	P_0	$\vec{0}$	μ_0
en présence d'onde	$P(M,t)=P_0+p_1(M,t)$	$\vec{v}(M,t)=\vec{v}_1(M,t)$	$\mu(M,t)=\mu_0+\mu_1(M,t)$

- Le champ $p_1(M,t)$, algébrique, est appelé **surpression**, ou **pression acoustique**.
- Le champ $\mu_1(M,t)$ est algébrique.

Le fluide est supposé idéal, son évolution adiabatique réversible; on néglige la pesanteur; on note c la célérité.

L'approximation acoustique porte sur les champs caractérisant l'onde acoustique, repérés par l'indice 1 :

- ce sont des infiniment petits du même ordre : $|\mu_1| \ll \mu_0$, $|p_1| \ll P_0$ et $\|\vec{v}_1\| \ll c$;
- leurs dérivées spatiale et temporelle sont aussi des infiniment petits du même ordre;
- leur moyenne temporelle est nulle : $\langle p_1(M,t)\rangle = 0$; $\langle \mu_1(M,t)\rangle = 0$ et $\langle \vec{v}_1(M,t)\rangle = \vec{0}$.

Équations de l'acoustique linéaire

Les expressions sont linéarisées au premier ordre vis-à-vis des grandeurs d'indice 1 et de leurs dérivées.

Les champs eulériens de vitesse $\vec{v}_1$, de surpression p_1 et de variation de masse volumique μ_1 vérifient, dans le cadre de l'approximation acoustique, les équations linéaires suivantes :

Loi de la quantité de mouvement $\quad \mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}_1(M,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1(M,t)$

Conservation de la masse $\quad \dfrac{\partial \mu_1(M,t)}{\partial t} + \mu_0 \,\text{div}\, \vec{v}_1(M,t) = 0$

Adiabaticité $\quad \mu_1(M,t) = \mu_0 \chi_S p_1(M,t)$

- L'écoulement associé à une onde acoustique est compressible : $\text{div}\,\vec{v}_1 \neq 0$.
- L'écoulement associé à une onde acoustique est irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}_1 = \vec{0}$.
- Le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide est défini par : $\boxed{\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S}$.
- L'accélération d'une particule de fluide s'écrit $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ lorsque $v \ll c$, vitesse du son dans le fluide.
- En éliminant μ_1, on établit que p_1 et $\vec{v}_1$ vérifient le système d'équations couplées

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1} \quad \text{et} \quad \boxed{\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\,\text{div}\,\vec{v}_1}.$$

- Dans le cas unidimensionnel en coordonnées cartésiennes où $p_1(M,t) = p_1(x,t)$, $\vec{v}_1(M,t) = v_1(x,t)\vec{u}_x$ et $\mu_1(M,t) = \mu_1(x,t)$, les équations couplées linéarisées s'écrivent

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \text{et} \quad \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}\,.$$

Équation de d'Alembert pour la surpression

La surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta p_1 = 0 \qquad \text{avec} \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}$$

- La célérité c ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation; elle ne dépend pas de l'onde.
- Les champs $\vec{v}_1(M,t)$ et $\mu_1(M,t)$ vérifient la même équation de d'Alembert.
- Dans le cas unidimensionnel en cartésienne, on retrouve l'équation $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0$.

Célérité du son

La vitesse du son dans l'eau est $c_{\text{eau}} = 1{,}4 \times 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- On retient l'ordre de grandeur $c \approx 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un liquide.

La célérité du son dans un gaz parfait à la température T_0 est donnée par

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}\,.$$

- Pour l'air, on a $M = 29{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\gamma = 1{,}40$. À $T_0 = 20\ °\text{C} = 293\ \text{K}$, on obtient $\boxed{c_{\text{air}} = 343\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Énergie d'une onde sonore

Densité volumique d'énergie sonore

La présence d'une onde sonore est associée à la présence d'une énergie mécanique portée par les particules de fluide. La propagation de l'onde sonore se traduit par la propagation de cette énergie mécanique.
En présence d'une onde sonore, un volume $\mathrm{d}\tau$ contient une énergie $\mathrm{d}\mathcal{E} = e(M,t)\,\mathrm{d}\tau$ où la densité volumique d'énergie sonore $e(M,t)$ est donnée par

$$e(M,t) = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{v}_1^{\,2}(M,t) + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2(M,t)$$

- Le terme $\frac{1}{2}\mu_0 \vec{v}_1^{\,2}$ représente la densité volumique d'énergie cinétique du fluide en présence de l'onde sonore.
- Le terme $\frac{1}{2}\chi_S p_1^2$ représente la densité volumique d'énergie potentielle emmagasinée par le fluide sous l'effet des forces de pression en présence de l'onde sonore.

Vecteur densité de courant énergétique

La puissance $\mathrm{d}\mathcal{P}(t)$ transmise à travers une surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}$ est donnée par le flux du vecteur densité de courant énergétique $\vec{\Pi}(M,t)$:

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(t) = \vec{\Pi}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\Pi}(M,t) = p_1(M,t)\cdot\vec{v}_1(M,t)$$

- La norme $\|\vec{\Pi}(M,t)\|$ du vecteur densité de courant énergétique s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Intensité et niveaux sonores

L'intensité sonore d'une onde acoustique est le flux surfacique moyen en temps du vecteur densité de courant énergétique :

$$I = \|\langle\overrightarrow{\Pi}(M,t)\rangle\|\,.$$

- L'intensité sonore représente la puissance moyenne transporté par l'onde par unité de surface.
- Elle s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

Le niveau sonore d'une onde acoustique dans l'air est défini par :

$$I_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{I}{I_0}$$

où l'intensité de référence est $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

- Le niveau sonore s'exprime en décibels (dB) ; c'est une grandeur sans dimension.
- L'intensité de référence correspond au seuil limite de perception pour $f = 1000$ Hz.
- Quelques ordres de grandeur : pièce calme 30 dB, conversation normale 60 dB, avion au décollage 120 dB.

Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

Onde plane

Une onde est dite plane si à tout instant, la grandeur vibratoire a même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

- Le lieu des points où la grandeur vibratoire à la même valeur à tout instant est appelée **surface d'onde**. Une onde est dite plane si ses surfaces d'onde sont des plans.

Notation complexe

La linéarité des équations permet d'utiliser la notation complexe.
À la surpression $p_1(M,t) = p_{10}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi)$ on associe la grandeur complexe

$$\underline{p}_1(M,t) = \underline{p}_{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{p}_{10} = p_{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,.$$

On en déduit les équations complexes de l'acoustique linéaire :

Loi de la quantité de mouvement	$\mu_0\omega\,\overrightarrow{\underline{v}}_1(M,t) = \underline{p}_1(M,t)\,\overrightarrow{k}$
Conservation de la masse	$\omega\underline{\mu}_1(M,t) = \mu_0\,\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{v}}_1(M,t)$
Adiabaticité	$\underline{\mu}_1(M,t) = \mu_0\chi_S\underline{p}_1(M,t)$

Caractère longitudinal

On déduit de la relation $\mu_0\omega\,\overrightarrow{\underline{v}}_1(M,t) = \underline{p}_1(M,t)\,\overrightarrow{k}$:

Les ondes sonores dans les fluides sont longitudinales : la vitesse des particules de fluides due à l'onde est parallèle à la direction de propagation de l'onde.

- Cette propriété reste vraie pour les ondes planes progressives quelconques : $p_1(M,t) = f(x - ct)$.

Impédance acoustique

L'impédance acoustique d'un fluide de masse volumique μ_0 et de coefficient de compressibilité adiabatique χ_S est définie, **pour une onde plane progressive harmonique**, par

$$Z_\mathrm{a} = \frac{p_1(M,t)}{v_1(M,t)} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

- L'impédance acoustique ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation.
- L'impédance acoustique relative à une OPPH se propageant dans le sens opposé est $Z_\mathrm{a} = -\mu_0 c$.
- Cette expression de l'impédance acoustique se généralise aux ondes planes progressives de forme quelconque (non harmoniques).
- Pour une onde non plane ou non progressive, la surpression et la vitesse ne sont *a priori* pas en phase.
- Dans le cas d'une onde sonore se propageant dans un tuyau de section S, on définit parfois l'impédance acoustique par $\boxed{Z_\mathrm{a} = \frac{p_1}{D_\mathrm{v}} = \frac{p_1}{S v_1}}$.
- On retiendra en ordre de grandeur : $Z_{\mathrm{a,liquide}} \gg Z_{\mathrm{a,gaz}}$.

Aspect énergétique

Pour une OPPH se propageant selon le vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$e(M,t) = \mu_0 v_1^2(M,t) = \chi_S p_1^2(M,t) \qquad \text{et} \qquad \vec{\Pi}(M,t) = \mu_0 c v_1^2(M,t)\vec{u} = \frac{p_1^2(M,t)}{\mu_0 c}\vec{u}$$

- Il y a équi-répartition entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique : $e_\mathrm{c}(M,t) = e_\mathrm{p}(M,t) = e(M,t)/2$.

Ondes acoustiques sphériques harmoniques

La surpression d'une onde sphérique harmonique divergente est de la forme

$$p_1(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi)\,.$$

Le champ des vitesses, obtenu en intégrant la loi de la quantité de mouvement linéarisée, est de la forme

$$v_1(r,t) = \frac{A_0}{\mu_0 c r}\cos(\omega t - kr + \varphi) + \frac{A_0}{\mu_0 k c r^2}\sin(\omega t - kr + \varphi)\,.$$

- Une onde divergente est caractérisée par la surpression $p_1(r,t) = \dfrac{A_0}{r}\cos(\omega t + kr + \varphi)$.
- Le terme en $1/r$, qui prédomine quand $r \gg \lambda$, est appelé **champ lointain**.
- Le terme en $1/r^2$, qui prédomine quand $r \ll \lambda$, est appelé **champ proche**. La vitesse correspondante étant en quadrature temporelle avec la surpression, ce terme ne rayonne aucune puissance acoustique en moyenne dans le temps.
- La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r est due au champ lointain :

$$\mathcal{P} = \oiint_{M\in\Sigma} \langle\vec{\Pi}\rangle\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = \frac{2\pi A_0^2}{\mu_0 c}\,.$$

La puissance moyenne traversant une sphère ne dépend pas de son rayon r, ce qui traduit la conservation de l'énergie acoustique.
La décroissance en $1/r$ du champ de surpression n'est pas due à une atténuation, mais traduit la conservation de l'énergie.