Physique des ondes (complément) Modélisation d'un solide

1 — Modélisation discrète

On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, selon un axe Ox, constituée de masses m identiques, reliées deux à deux par un ressort de raideur k et de longueur au repos a. Les masses, qui modélisent les atomes d'un cristal, se déplacent sans frottement le long de l'axe Ox. Au repos, elles sont distantes de a.
On a donc une description discrète du milieu; la masse numéro n a pour abscisse au repos $x_n^0 = na$. Lors de son mouvement, son abscisse est $x_n(t) = x_n^0 + \xi_n(t) = na + \xi_n(t)$, où $\xi_n(t)$ est l'écart à sa position d'équilibre (sur la figure 1, on a $\xi_n(t) > 0$ et $\xi_{n-1}(t) < 0$).

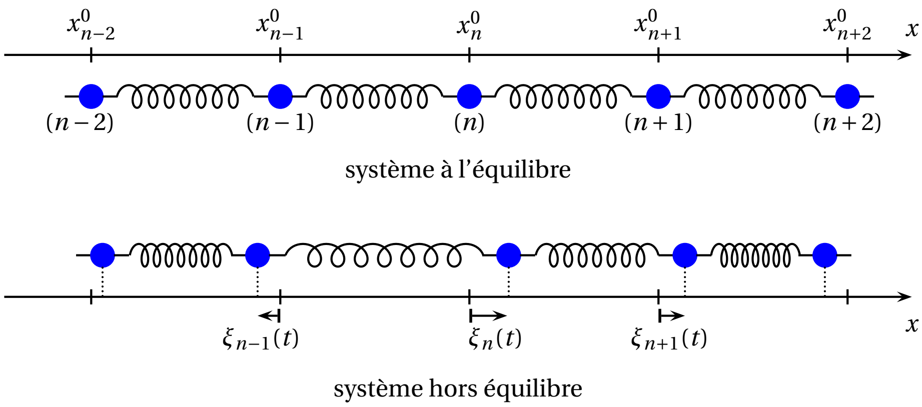

Figure 1 – Chaîne infinie d'oscillateurs.

La masse (n) est soumise d'une part à l'action du ressort « de droite ». Sa longueur étant :

$$L_\text{d} = x_{n+1}(t) - x_n(t) = x_{n+1}^0 + \xi_{n+1}(t) - x_n^0 - \xi_n(t) = a + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)$$

cette action vaut $\overrightarrow{T}_\text{d} = k[L_\text{d} - a]\overrightarrow{e}_x = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)]\overrightarrow{e}_x$. La même masse est soumise d'autre part à l'action du ressort « de gauche », de longueur :

$$L_\text{g} = x_n(t) - x_{n-1}(t) = x_n^0 + \xi_n(t) - x_{n-1}^0 - \xi_{n-1}(t) = a + \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)\,.$$

Cette action vaut donc $\overrightarrow{T}_\text{g} = -k[L_\text{g} - a]\overrightarrow{e}_x = -k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)]\overrightarrow{e}_x$.
L'accélération de la masse (n) étant $\dfrac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u}_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 \xi_n}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u}_x$, appliquons à celle-ci le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)]\,. \tag{1}$$

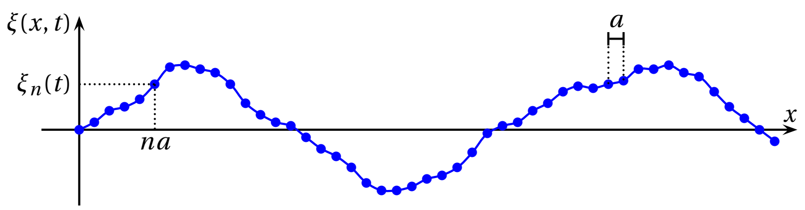

Figure 2 – Approximation des milieux continus.

La distance interatomique a est typiquement de l'ordre de l'angström (10^{-10} m); cette valeur étant très faible devant l'échelle de longueur caractérisant l'onde, il est justifié de passer à une description continue du milieu. Dans approximation des milieux continus des milieux continus (voir figure 2), on introduit une fonction continue des deux variables x et t, notée $\xi(x,t)$, de classe $\mathscr{C}^2$, qui coïncide avec $\xi_n(t)$ quand $x = x_n^0 = na$:

$$\xi(x = na, t) = \xi_n(t)\,.$$

Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de x_0^n permet d'écrire :

$$\xi_{n+1}(t) = \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_n(t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

et

$$\xi_{n-1}(t) = \xi(x_n^0 - a, t) = \xi(x_n^0, t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_n(t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

À l'ordre le plus bas non nul, il reste : $k[\xi_{n+1}(t)-\xi_n(t)] - k[\xi_n(t)-\xi_{n-1}(t)] = a^2\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, et la relation (1) conduit à :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{ka^2}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \qquad (2)$$

2 — Lien avec les propriétés macroscopiques du milieu

L'équation (2) fait intervenir les constantes k, a et m, caractérisant une description à l'échelle microscopique du milieu. À l'échelle macroscopique, les propriétés élastiques d'une tige peuvent être caractérisées par le module de Young E du matériau.

Le module de Young d'un matériau est donné par $\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta L}{L}$ pour un allongement relatif $\Delta L/L$ sous l'effet de la force S sur une surface S.

Une chaîne de longueur L contient $n = L/a$ ressorts ; si ΔL est l'allongement total de la chaîne, l'allongement de chaque ressort est $\mathrm{d}\ell = \Delta L/n = a\Delta L/L$. La force s'exerçant sur un atome vaut alors $f = k\,\mathrm{d}\vec{\ell} = ka\Delta L/L$. Considérons un réseau tridimensionnel cubique simple (voir figure 3), chaque nœud étant occupé par un atome de masse m. Une section S est traversée par $N = S/a^2$ chaînes ; un atome de cette section est donc soumis à la force

$$F = Nf = \frac{S}{a^2}ka\frac{\Delta L}{L} = S\frac{k\Delta L}{aL}.$$

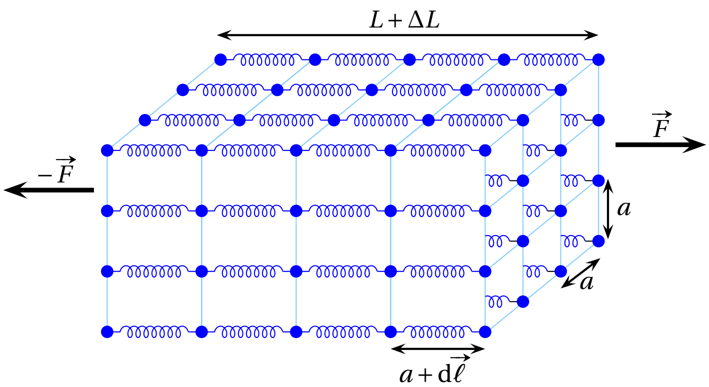

FIGURE 3 – Solide tridimensionnel.

La **contrainte**[1] vaut alors $\dfrac{F}{S} = \dfrac{k\Delta L}{aL}$. D'après la définition du module de Young, on en déduit $E = k/a$. Le volume d'une maille est a^3 ; le motif comprend un atome par maille, de masse m. La masse volumique du matériau vaut donc $\rho = m/a^3$. L'équation (2) s'écrit alors : $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{ka^2}{m}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{k}{a}\dfrac{a^3}{m}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, d'où

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \qquad (3)$$

1. Une contrainte est une force surfacique. Elle a la dimension d'une pression.