Électromagnétisme — I — Symétries du champ électrique

Distribution de charges

On appelle distribution de charges un ensemble de charges électriques dans un domaine de l'espace.

Distribution volumique

À l'**échelle microscopique**, une distribution de charge $\mathcal{D}$ est constituée d'un très grand nombre de particules microscopiques chargées (électrons, protons, ions), assimilées à des **charges ponctuelles**.
À l'**échelle mésoscopique**, un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_M$ est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules chargées mais suffisamment petit pour être considéré comme un point à l'échelle macroscopique.

Le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_M$ portant la charge δQ, la **densité volumique de charge** en M est définie par

$$\delta Q = \rho(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

La charge est une grandeur scalaire algébrique qui s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

La charge totale d'une distribution $\mathcal{D}$ s'écrit de façon générale

$$Q = \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

- Si la densité volumique $\rho_0(t)$ de charge est uniforme, la charge totale s'écrit $Q = \rho_0 \times \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est le volume de la distribution.
- Un système est dit globalement neutre si $Q = 0$. Un milieu est dit localement neutre en M si $\rho(M,t) = 0$.

Distribution surfacique

Si les charges sont réparties sur une épaisseur h « très petite », on peut décrire la distribution par une densité surfacique de charge $\sigma(M)$: une surface élémentaire $\mathrm{d}S_M$ en M porte la charge $\boxed{\delta Q = \sigma(M)\,\mathrm{d}S_M}$.

- $\sigma(M)$ s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

Distribution linéique

Si les charges sont réparties sur un cylindre de rayon a « très petit », on peut décrire la distribution par une densité linéique de charge $\lambda(M)$: une longueur élémentaire $\mathrm{d}\ell_M$ en M porte la charge $\boxed{\delta Q = \lambda(M)\,\mathrm{d}\ell_M}$.

- $\lambda(M)$ s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Invariances et symétries d'une distribution de charge

Invariances d'une distribution de charge

Une distribution de charge est **invariante par translation** d'axe Δ si elle reste inchangée par *toute* translation selon cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz, la densité volumique de charge $\rho(M)$ est indépendante de z.
- Une distribution invariante par translation selon Oz est nécessairement d'**extension spatiale infinie**[1] selon cet axe.

1. C'est une modélisation, qui revient à négliger les « effets de bord » ; une distribution de longueur L peut-être considérée comme infini si elle est vue d'une distance $r \ll L$.

Une distribution de charge est **invariante par rotation** autour d'un axe Δ si elle reste inchangée par *toute* rotation autour de cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz en coordonnées cylindriques, la densité volumique de charge $\rho(M)$ est indépendante de θ.

Distribution à symétrie cylindrique

Une distribution de charge est dite à symétrie cylindrique si elle est invariante par translation selon un axe Oz et par toute rotation autour de cet axe Oz.

- En coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe Oz, la densité volumique de charge ne dépend spatialement que de r :
$$\rho(M) = \rho(r)\,.$$
- Une distribution à symétrie cylindrique est nécessairement infinie selon Oz.

Distribution à symétrie sphérique

Une distribution est dite à symétrie sphérique (de centre O) si elle invariante par rotation autour de tout axe passant par O.

- En coordonnées sphériques (r,θ,φ) de centre O, la densité volumique de charge ne dépend spatialement que de $r = OM$:
$$\rho(M) = \rho(r)\,.$$

Plan de symétrie d'une distribution de charge

Une distribution de charge admet un plan de symétrie Π si la distribution de charge obtenue par symétrie par rapport à Π lui est en tout point identique.

- La distribution est invariante par symétrie par rapport à Π :
$$\forall M \in \mathcal{D} \quad M' = \mathscr{S}_\Pi(M) \implies \rho(M') = \rho(M)\,.$$
- En coordonnées cartésiennes, si Oxy est un plan de symétrie, on a $\rho(x,y,-z) = \rho(x,y,z)$.
- Un plan de symétrie d'une distribution de charge est nécessairement un plan de symétrie géométrique de cette distribution.
- Si la distribution est plane [2], la plan qui la contient est nécessairement un plan de symétrie de cette distribution.

Plan d'anti-symétrie d'une distribution de charge

Une distribution de charge admet un plan d'antisymétrie Π^* si la distribution de charge obtenue par symétrie par rapport à Π^* lui est en tout point opposée.

- On peut écrire
$$\forall M \in \mathcal{D} \quad M' = \mathscr{S}_{\Pi^*}(M) \implies \rho(M') = -\rho(M)\,.$$
- En coordonnées cartésiennes, si Oxy est un plan d'anti-symétrie, on a $\rho(x,y,-z) = -\rho(x,y,z)$.
- Un plan d'anti-symétrie d'une distribution de charge est nécessairement un plan de symétrie géométrique de cette distribution.
- Si Π^* est un plan d'anti-symétrie d'une distribution $\mathcal{D}$, cette distribution est invariante si on lui applique une symétrie par rapport à Π^* puis une conjugaison de charge $\mathscr{C}$ (chaque charge est multipliée par -1), soit la transformation $\mathscr{C} \circ \mathscr{S}_{\Pi^*}$.
- La charge électrique est nécessairement nulle en tout point d'un plan d'anti-symétrie d'une distribution de charge.

2. Contenue dans un plan.

Principe de Curie

> Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

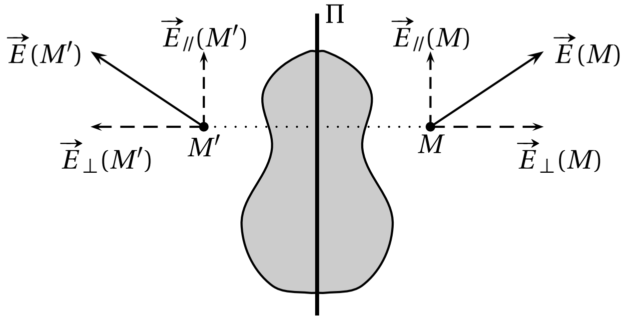
➤ En électrostatique, les causes sont les charges de la distribution ; l'effet est le champ électrique créé.

Distribution ayant un plan de symétrie

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charge admettant un plan de symétrie Π.
La symétrie par rapport à Π, laissant invariante la distribution $\mathcal{D}$, soit laisser invariant le champ $\vec{E}(M)$ créé :

$$\vec{E}(M') = \mathscr{S}_\Pi\left(\vec{E}(M)\right) \quad \text{avec} \quad M' = \mathscr{S}_\Pi(M).$$

> **Le champ électrique est un vecteur polaire**.
>
> On en déduit son expression en M', symétrique de M par rapport à Π à partir des règles de transformation d'un vecteur polaire par symétrie plane :
>
> $$\begin{cases} \vec{E}_{/\!/}(M') = \vec{E}_{/\!/}(M) \\ \vec{E}_\perp(M') = -\vec{E}_\perp(M) \end{cases}$$



> En tout point d'un plan de symétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution appartient au plan :
> $$\vec{E}_\perp(M) = \vec{0} \quad \forall M \in \Pi.$$

> En tout point d'un axe de symétrie d'une distribution, le champ électrostatique créé appartient à cet axe.

➤ Au centre d'une distribution à symétrie sphérique, le champ est nul.

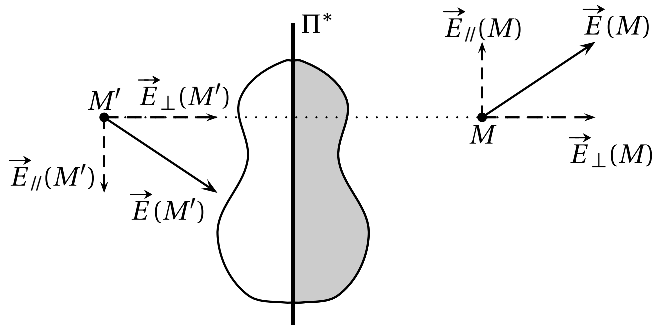
Distribution ayant un plan d'antisymétrie

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charge admettant un plan d'antisymétrie Π^*.
La composée $\mathscr{C} \circ \mathscr{S}_{\Pi^*}$, laissant invariante la distribution $\mathcal{D}$, soit laisser invariant le champ $\vec{E}(M)$ créé :

$$\vec{E}(M') = -\mathscr{S}_\Pi\left(\vec{E}(M)\right) \quad \text{avec} \quad M' = \mathscr{S}_\Pi(M).$$

Le champ électrique étant un vecteur polaire, on en déduit son expression en M', symétrique de M par rapport à Π^* à partir des règles de transformation d'un vecteur polaire par symétrie plane, puis en appliquant $-\mathrm{Id}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_{/\!/}(M') = -\vec{E}_{/\!/}(M) \\ \vec{E}_\perp(M') = \vec{E}_\perp(M) \end{cases}$$



> En tout point d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution est normal à ce plan :
>
> $$\vec{E}_{/\!/}(M) = \vec{0} \quad \forall M \in \Pi^*.$$

Distribution invariante

Si une distribution $\mathcal{D}$ est invariante par une transformation géométrique, le champ électrique créé doit être invariant par cette même transformation.

> Si la distribution $\mathcal{D}$ est invariante par translation selon Oz, les composantes du champ $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de z.

➤ On peut se placer en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

> Si la distribution $\mathcal{D}$ est invariante par rotation autour de Oz, les composantes du champ $\vec{E}(M)$ ne dépendent par de θ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Distribution à symétrie cylindrique

> En coordonnées cylindriques, le champ créé par une distribution à symétrie cylindrique d'axe Oz est de la forme
> $$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r\,.$$

Distribution à symétrie sphérique

> En coordonnées sphérique, le champ créé par une distribution à symétrie sphérique de centre O est de la forme
> $$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r\,.$$