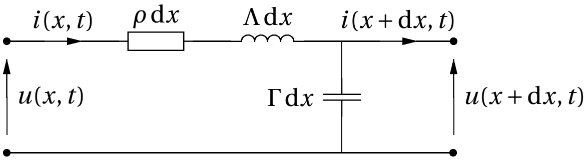
Équations d'onde linéaires

Exemple

Des phénomènes peuvent être régis par des équations d'onde autres que l'équation de d'Alembert.

Câble coaxial résistif Le câble coaxial résistif peut être modélisé par le schéma



La tension vérifie l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\Lambda}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0\,.$$

Ondes planes pseudo-progressives harmoniques

Une solution de l'équations d'onde précédente sous forme d'onde progressive harmonique $\underline{s}(x,y) = \underline{S}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}$ ne peut convenir que si k est complexe.

> Une onde plane pseudo-progressive harmonique est une onde plane harmonique de la forme
>
> $$\underline{s}(x,t) = \underline{S}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)}$$
>
> dont le module d'onde est complexe, noté $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k''$.

En écrivant que cette onde vérifie l'équation d'onde, on en déduit la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$.

> La solution générale d'une équation d'onde unidimensionnelle linéaire peut s'écrire comme la superposition d'ondes planes pseudo-progressives harmoniques, dont l'écriture en notation complexe est de la forme :
>
> $$\underline{s}(x,t) = \underline{S}_0 \exp\big(\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)\big)\,.$$
>
> Une telle onde est solution de l'équation d'onde si ω et $\underline{k}$ vérifient une relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ que l'on peut mettre sous la forme :
>
> $$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + \mathrm{i}k''(\omega)\,.$$
>
> - La partie réelle $k'(\omega)$ traduit la propagation de l'onde, à la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'(\omega)}$. Le signe de $k'(\omega)$ donne le sens de propagation (propagation selon les x croissants si $k' > 0$).
> - Si la vitesse de phase dépend de la pulsation ω, le phénomène est dispersif.
> - La partie imaginaire $k''(\omega) \neq 0$ traduit la dépendance spatiale de l'amplitude de l'onde.
>   Dans le cas $k'(\omega) > 0$ (propagation selon les x croissants), une atténuation correspond à $k''(\omega) < 0$.

En notant $\underline{S}_0 = S_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, l'onde réelle s'écrit

$$\boxed{s(x,t) = S_0\,\mathrm{e}^{k''(\omega)x}\cos[\omega t - k'(\omega)x + \psi]}\,.$$

- Si $k'' = 0$, on retrouve une onde progressive (harmonique).
- Si $k' = 0$, il n'y a pas de propagation ; l'onde est dite **évanescente** : $s(x,t) = S_0\,\mathrm{e}^{k''(\omega)x}\cos(\omega t + \psi)$.

Superposition de deux ondes de fréquences proches dans un milieu non absorbant et dispersif

On considère la superposition de deux ondes progressives harmoniques :

$$s_1(x,t) = s_0\cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad s_2(x,t) = s_0\cos(\omega_2 t - k_2 x)\,, \quad \text{avec} \quad \omega_2 > \omega_1\,.$$

En notant $\omega_0 = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ la pulsation moyenne, on a $\omega_1 = \omega_0 - \dfrac{\delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \dfrac{\delta\omega}{2}$, avec $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0$.
On se place dans le cas d'un milieu *faiblement dispersif* : on peut linéariser $k(\omega)$ au voisinage de $k_0 = k(\omega_0)$, soit

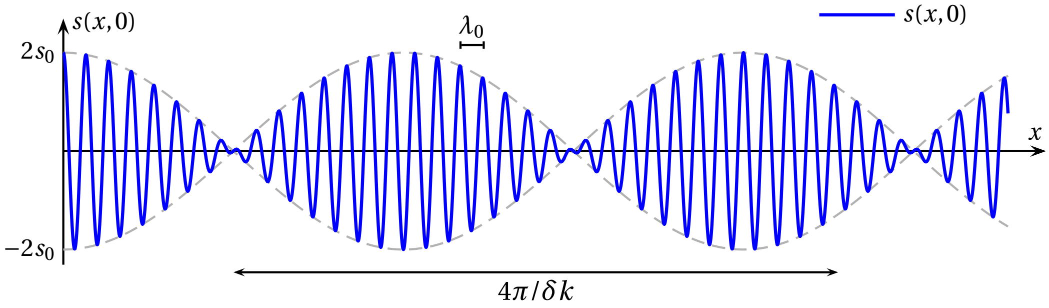
$$k_1 = k(\omega_1) = k\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right) \approx k_0 - \frac{\delta\omega}{2}\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} \quad \text{et} \quad k_2 = k(\omega_2) = k\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right) \approx k_0 + \frac{\delta\omega}{2}\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\,.$$

Description de l'onde résultante

En posant $\delta k = k_2 - k_1$, on obtient

$$\boxed{s(x,t) = 2s_0\cos\left[\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right]\cos(\omega_0 t - k_0 x)}\,.$$

- Le terme $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ représente une onde de période spatiale $\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{k_0}$.
- Le terme $\cos\left[\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right]$ représente une variation de période spatiale $\dfrac{4\pi}{\delta k} \gg \lambda_0$: c'est l'enveloppe qui module l'amplitude de l'onde de période λ_0.

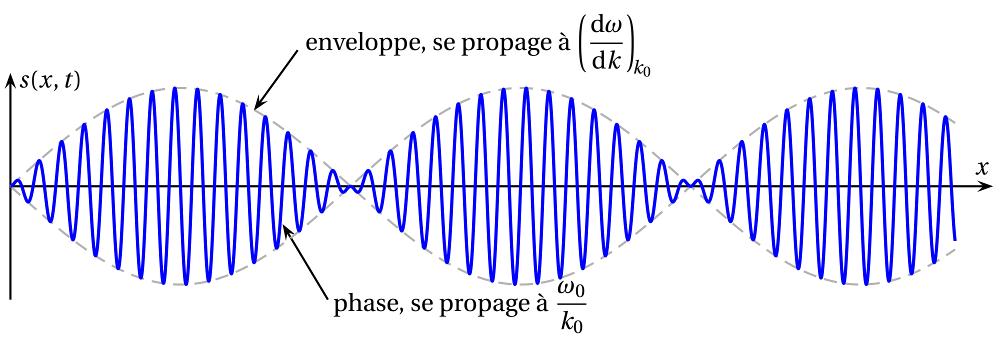


Propagation de l'onde résultante

L'onde résultant de la superposition de deux ondes de fréquences proches s'écrit

$$s(x,t) = 2s_0\cos\left[\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{v_\mathrm{g}}\right)\right]\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right]$$

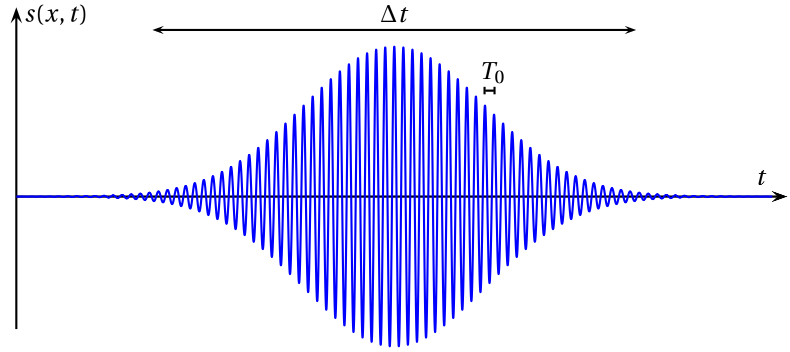
- $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k_0}$ est la **vitesse de phase**, vitesse de propagation de la phase de l'onde.
- $v_\mathrm{g} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$ est la **vitesse de groupe**, vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde.



Propagation d'un paquet d'ondes

Description d'un paquet d'ondes

Un paquet d'ondes est une onde présentant des oscillations de fréquence $f = 1/T_0$, sur une durée finie Δt :



Une telle onde peut se décomposer comme une superposition d'une infinité d'ondes harmoniques dont les pulsations sont telles que $\omega \in \left[\omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}\right]$, avec $\Delta\omega \ll \Omega_0$.

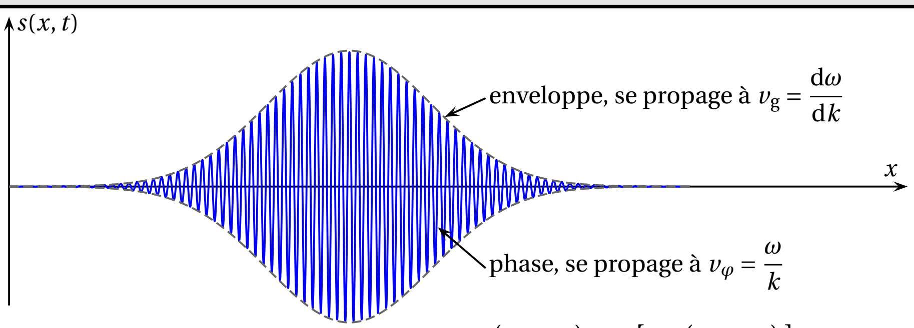
La largeur fréquentielle du paquet d'ondes est $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi}$.

On admet la propriété générale suivante :

> Un paquet d'ondes de durée Δ est caractérisé par un spectre dont la largeur fréquentielle Δf est telle que
>
> $$\Delta f \, \Delta t \approx 1\,.$$

Propagation d'un paquet d'ondes

> Dans un milieu faiblement dispersif :
>
> — l'enveloppe d'un paquet d'ondes se propage sans se déformer à la **vitesse de groupe** $v_g = \left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$;
>
> — à l'intérieur de l'enveloppe, la phase se propage à la **vitesse de phase** $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k_0}$.



- ➤ Le paquet d'ondes peut s'écrire sous la forme $s(x,t) = F\left(t - \dfrac{x}{v_g}\right)\cos\left[\omega_0\left(t - \dfrac{x}{v_\varphi}\right)\right]$, avec $v_g = \left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$ la vitesse de groupe et $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k_0}$ la vitesse de phase, où $F\left(t - \dfrac{x}{v_g}\right)$ est l'enveloppe du paquet d'ondes.
- ➤ L'enveloppe se propage sans se déformer dans le cas d'un milieu faiblement dispersif.
- ➤ Si la dispersion est plus importante, l'enveloppe se déforme au cours de la propagation. On observe un étalement du paquet d'ondes au cours de la propagation :