TD de physique des ondes no 4 — Phénomènes dispersifs

1 — Cornet acoustique

Pour amplifier le son perçu par l'oreille, on peut placer à son extrémité un cornet acoustique limité par une surface de révolution d'axe Ox et de section variable $S(x) = S_0 \exp(-\sigma x)$, où σ et S_0 sont des constantes. Au repos, la pression p_0 et la masse volumique μ_0 sont uniformes. On note χ_s le coefficient de compressibilité isentropique de l'air et $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_s}$. L'onde sonore est décrite par les champs $p_1(x,t)$ et $\mu_1(x,t)$ et le champ des vitesses $\vec{v}_1$ pour lequel on fait l'approximation de l'écoulement quasi unidimensionnel en posant $\vec{v}_1 = v_1(x,t)\,\vec{e}_x$. On traite le problème dans l'approximation acoustique.

1. En faisant un bilan de masse pour le système ouvert (V) compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, établir l'équation

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1\,.$$

À l'aide de l'équation d'Euler et de l'équation traduisant l'évolution thermodynamique du fluide, établir deux autres équations reliant les champs p_1, μ_1 et v_1.

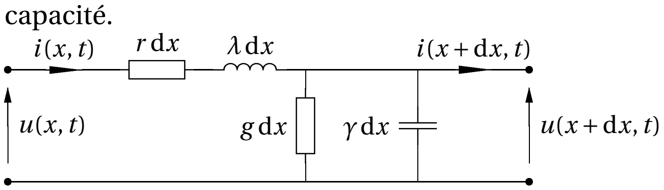
2. En déduire que la relation de dispersion pour des ondes proportionnelles à $\exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)]$ s'écrit

$$k^2 - \mathrm{i}\sigma k - \omega^2/c^2 = 0\,.$$

Discuter la nature des ondes suivants les valeurs de la pulsation. Vérifier l'effet amplificateur du cornet.

2 — Équation des télégraphistes

On modélise un câble coaxial par une ligne à constantes réparties. Le schéma ci-dessous représente une longueur $\mathrm{d}x$ du câble, où $r\,\mathrm{d}x$ est une résistance, $\lambda\,\mathrm{d}x$ une inductance, $g\,\mathrm{d}x$ une conductance et $\gamma\,\mathrm{d}x$ une capacité.



1. Montrer que la tension $u(x,t)$ vérifie l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\gamma + \lambda g)\frac{\partial u}{\partial t} + rg\,u(x,t)\,.$$

2. Dans quel cas retrouve-t-on l'équation de d'Alembert ? Exprimer alors la célérité c.

3. Dans le cas général, on cherche une solution de l'équation établie à la question 1 en régime harmonique de la forme $\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$, où $\mathrm{j}^2 = -1$ et $\underline{k}$ est *a priori* complexe. Établir la relation de dispersion entre ω et $\underline{k}$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

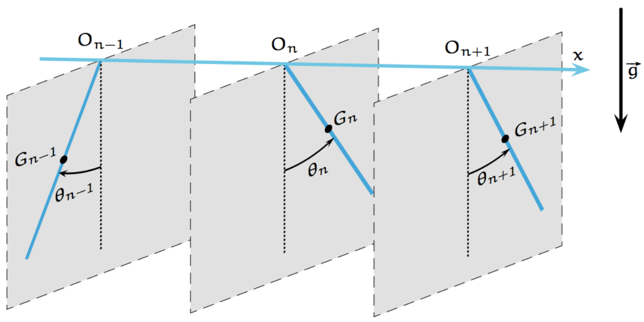
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \mathrm{j}a)(1 - \mathrm{j}b)$$

où a et b sont des grandeurs que l'on exprimera en fonction de r, g, λ, γ et ω.

4. On se place dans la condition dite de Heaviside : $r\gamma = g\lambda$. La propagation est-elle dispersive ? Y a-t-il absorption ? Si oui, préciser la distance caractéristique.

3 — Chaîne infinie de pendules couplés

On considère une chaîne infinie de pendules pesants couplés par un fil de torsion.



Chaque pendule est une barre homogène de longueur L, de masse m, fixée à l'axe de rotation Ox au point O_n d'abscisse $x_n = nd$. Il oscille dans le oplan yO_nz perpendiculaire à l'axe de rotation, et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J = \frac{1}{3}mL^2$. Sa position angulaire par rapport à la verticale est repérée par l'angle $\theta_n(t)$. Le fil de torsion, de constante C, exerce entre deux pendules successifs un couple de rappel proportionnel à l'écart angulaire entre ces pendules. Les effets des phénomènes dissipatifs sur le pendule (n) sont modélisés par un couple de frottement fluide $-\alpha \dfrac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t}$.

1. Établir une équation différentielle reliant $\theta_n(t)$ à $\theta_{n-1}(t)$ et $\theta_{n+1}(t)$.

2. On se place dans le cas d'oscillations de faible amplitude ($\theta_n \ll 1$). On suppose que la distance d entre deux pendules successifs est très faible devant les longueurs d'onde étudiées, ce qui permet de construire une fonction $\theta(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\theta(x = nd, t) = \theta_n(t)$.

Montrer que l'équation précédente se ramène à une équation aux dérivées partielles linéaire vérifiée par $\theta(x,t)$.

3. On cherche une solution en régime harmonique sous la forme

$$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)}\,.$$

Établir la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$.

4. On se place dans le cas où $\alpha = 0$.

4.a) Que devient la relation de dispersion ?

4.b) Selon les valeurs de la pulsation ω, déterminer s'il y a propagation. Préciser si la propagation est alors dispersive.

5. On se place dans le cas $\alpha \neq 0$ et on considère la pulsation ω « grande » (devant quoi ?).

5.a) Comment se simplifie la relation de dispersion ?

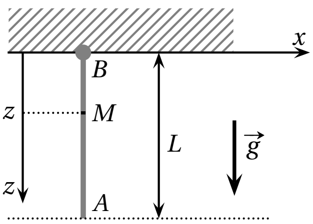
5.b) Y a-t-il propagation ? Si oui, est-elle dispersive ?

5.c) Y a-t-il absorption ?

5.d) Que peut-on dire si l'amortissement est négligeable ($\alpha = 0$) ?

4 — Corde vibrante verticale

On étudie une corde AB de longueur L, parfaitement flexible et sans frottements internes, de section négligeable, homogène de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ.



La corde est verticale ; l'axe des z est orienté vers le bas et l'origine est à l'extrémité B. L'axe Ox est dans un plan horizontal. La position d'un point M de la corde est repérée par sa cote z dans un référentiel galiléen lié à B.

1. La corde est en équilibre.

Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par $T(z) = \mu g(L-z)$.

2. La corde vibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément $\mathrm{d}z$ de corde à la cote z, montrer que l'élongation vérifie l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\frac{\partial x}{\partial z}\,.$$

3. Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux

$$\mathrm{d}\vec{f} = -\alpha\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$$

agissant sur l'élément de corde $\mathrm{d}z$, $\alpha > 0$ étant la constante de frottement ?

4. On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation ($z \ll L$). Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]$, où k est une constante réelle, ne peut se propager que pour une certaine valeur α_0 de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de μ, g et L.

5. Donner, pour $\alpha = \alpha_0$, les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde. Y a-t-il dispersion ?

6. On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution à l'équation d'onde dans la région $z \ll L$ sous la forme $\underline{x}(z,t) = \underline{a}\exp\left[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)\right]$ avec $\underline{k} = k_1 + \mathrm{i}k_2$ complexe (k_1 et k_2 étant réels). Exprimer k_2. En déduire que l'amplitude de l'onde augmente pendant la propagation. Le résultat est-il cohérent avec celui de la question 4 ?

7. Établir alors et représenter graphiquement la relation de dispersion. Poser $\omega_0^2 = \frac{g}{4L}$ et montrer que la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

8. Déterminer la relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe.