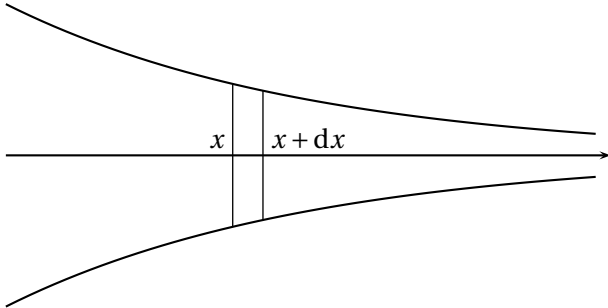


TD de physique des ondes no 4

Solution

1 — Cornet acoustique

1. On considère la tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$:



La masse de ce système est

$$\delta m(x, t) = \mu(x, t) S(x) dx.$$

Pendant dt , elle varie de

$$d(\delta m) = \delta m(x, t + dt) - \delta m(x, t) = \frac{\partial \mu_1}{\partial t} S(x) dx dt.$$

La masse reçue par ce système pendant dt est

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{reçu}} &= \mu(x, t) v_1(x, t) S(x) dt \\ &\quad - \mu(x + dx, t) v_1(x + dx, t) S(x + dx) dt \\ &= - \frac{\partial (\mu(x, t) v_1(x, t) S(x))}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre, comme $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{reçu}} &= -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S(x) dx dt - \mu_0 v_1 \frac{dS}{dx} dx dt \\ &= -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S(x) dx dt + \mu_0 \sigma v_1 S(x) dx dt \end{aligned}$$

avec $S(x) = S_0 e^{-\sigma x}$.

Le bilan $d(\delta m) = \delta^2 m_{\text{reçu}}$, conduit alors à

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1.$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

L'équation linéarisée traduisant l'adiabaticité de l'évolution s'écrit

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1.$$

2. La conservation de la matière s'écrit alors

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} + \mu_0 \sigma \frac{\partial v_1}{\partial t}.$$

D'après l'équation d'Euler, on a donc

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Avec $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_S}$, on en déduit l'équation d'onde vérifiée par la surpression :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \sigma c^2 \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

➤ Ce n'est pas l'équation de d'Alembert; cependant, dans le cas d'un tuyau de section constante, caractérisé par $\sigma = 0$, on retrouve bien l'équation de d'Alembert, le phénomène étant unidimensionnel.

En cherchant une solution proportionnelle à $\exp[i(\omega t - kx)]$, on obtient

$$-\omega^2 = -\underline{k}^2 c^2 + i \underline{k} \sigma c^2,$$

d'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 - i \sigma \underline{k} - \omega^2 / c^2 = 0.$$

Le discriminant de la relation de dispersion s'écrit

$$\Delta = (-i\sigma)^2 + \frac{4\omega^2}{c^2} = \frac{4\omega^2}{c^2} - \sigma^2.$$

Il apparaît une pulsation caractéristique $\omega_c = \frac{\sigma c}{2}$.

1^{er} cas : $\omega < \omega_c$. On a $\Delta < 0$, et

$$\underline{k} = \frac{i\sigma \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Le module d'onde est imaginaire pur : il n'y a pas de propagation possible (pas de partie réelle pour $\underline{k}$); on observe une onde évanescence.

2^e cas : $\omega > \omega_c$. On a $\Delta > 0$, et

$$\underline{k} = \frac{i\sigma \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{i\sigma}{2} \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}.$$

La surpression s'écrit alors

$$p_1(x, t) = p_{01} e^{i(\omega t \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} x)} e^{-i(\frac{i\sigma}{2} x)}.$$

On conserve la solution correspondant à une progression dans le sens des x croissants, soit

$$p_1(x, t) = p_{01} e^{i(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} x)} e^{\frac{\sigma}{2} x}.$$

On a donc

$$p_1(x, t) = p_{10} e^{\frac{\sigma}{2}x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi} + \varphi \right) \right]$$

La partie imaginaire $k'' = \frac{\sigma}{2} > 0$ se traduit pas une **amplification** de l'amplitude de l'onde acoustique (c'est le rôle du cornet!). Cette amplification n'est pas due au milieu de propagation, mais à la géométrie du système.

La partie réelle $k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$ traduit la propagation de l'onde à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$.

En conclusion :

- le cornet permet de transmettre les ondes de pulsation $\omega > \omega_c = \frac{\sigma c}{2}$; il se comporte donc comme un filtre passe-haut ;
- lorsque les ondes sont transmises, le cornet réalise une amplification, d'autant plus important que σ est grand (c'est-à-dire que la section du cornet diminue rapidement), mais la fréquence de coupure f_c est alors plus élevée ;
- la propagation, quand elle se produit, est dispersive : c'est un amplificateur de piètre qualité musicale.

2 — Équation des télégraphistes

1. Loi des mailles :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + r i(x, t) dx + \lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} dx,$$

soit

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = r i(x, t) + \lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}.$$

Loi des nœuds :

$$i(x, t) = g u(x + dx, t) dx + \gamma \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} dx + i(x + dx, t)$$

soit

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = g u(x, t) + \gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -r \frac{\partial i}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = r g u(x, t) + r \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ &= r g u(x, t) + r \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda g \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r \gamma + \lambda g) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u(x, t).$$

2. On retrouve l'équation de d'Alembert dans le cas où

- $r = 0$, la résistance des conducteurs est négligeable ; et
- $g = 0$, la résistance de fuite de l'isolant est infinie.

On a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}.$$

3. L'équation d'onde conduit à

$$-\underline{k}^2 = -\omega^2 \gamma \lambda + j \omega (r \gamma + \lambda g) = r g$$

soit avec l'expression de c

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \omega (r \gamma + \lambda g) - r g.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \underline{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \frac{(r \gamma + \lambda g) c^2}{\omega} - \frac{r g c^2}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \frac{r \gamma + \lambda g}{\omega \lambda \gamma} - \frac{r g}{\omega^2 \lambda \gamma} \right] \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \left(\frac{r}{\lambda \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) - \left(\frac{r}{\lambda \omega} \frac{g}{\gamma \omega} \right) \right].$$

L'expression proposée s'écrivant

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 - j(a + b) - ab]$$

on identifie facilement

$$a = \frac{r}{\lambda \omega} \quad \text{et} \quad b = \frac{g}{\gamma \omega}.$$

4. La condition de Heaviside s'écrit

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{g}{\gamma},$$

et la relation de dispersion devient

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - 2j \frac{r}{\lambda \omega} - \frac{r^2}{\lambda^2 \omega^2} \right].$$

En notant $\underline{k} = k_r + j k_i$, on a

$$\underline{k}^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i.$$

Par identification avec la relation de dispersion :

$$k_r^2 - k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{r^2}{\lambda^2 \omega^2} \right] \quad \text{et} \quad 2 k_r k_i = -2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{\lambda \omega}.$$

On identifie facilement

$$k_r = \frac{\omega}{c}$$

$$k_i = -\frac{\omega}{c} \frac{r}{\lambda \omega} = -\frac{r}{c \lambda} = -\frac{r}{\lambda} \sqrt{\gamma \lambda}$$

soit

$$k_i = -r \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}.$$

La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = c$: la propagation n'est pas dispersive.

On a $k_i < 0$: il y a absorption de l'onde au cours de sa propagation. L'onde peut s'écrire

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}_0 e^{k_i x} \cos^{j(\omega t - k_r x)} = \underline{u}_0 e^{-x/\delta} \cos^{j(\omega t - k_r x)}.$$

L'absorption se fait sur une distance caractéristique $\delta =$

$$-\frac{1}{k_i}, \text{ soit } \delta = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}.$$

3 — Chaîne infinie de pendules couplés

1. Appliquons le théorème du moment cinétique en O_n , projeté sur l'axe Ox , au pendule (n). Ce pendule est soumis à son poids $m\vec{g}$, qui s'applique en son centre de gravité G_n , de moment

$$\overrightarrow{O_n G_n} \wedge m\vec{g} = -\frac{L}{2} mg \sin(\theta_n) \vec{e}_x.$$

Le couple de rappel exercé par le fil de torsion compris entre O_{n-1} et O_n est $-C(\theta_n - \theta_{n-1}) \vec{e}_x$; le fil de torsion compris entre O_n et O_{n+1} exerce le couple de rappel $-C(\theta_n - \theta_{n+1}) \vec{e}_x$. La projection selon $\vec{e}_x$ du théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C[\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}] - \frac{mgL}{2} \sin\theta_n - \alpha \frac{d\theta_n}{dt}.$$

Dans le cas des oscillations de faible amplitude, on peut linéariser $\sin\theta_n \approx \theta_n$ et l'équation du mouvement devient :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C[\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}] - \frac{mgL}{2} \theta_n - \alpha \frac{d\theta_n}{dt}$$

2. On peut alors remplacer θ_{n-1} et θ_{n+1} dans l'équation précédente par leur développement de Taylor au voisinage de $x = nd$:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(t) &= \theta(x+d, t) = \theta(x, t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ &= \theta_n(t) + d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \theta_{n-1}(t) &= \theta(x-d, t) = \theta(x, t) - d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ &= \theta_n(t) - d \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

On a alors $\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1} = d^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ et l'équation de récurrence s'écrit :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mgL}{2} \theta(x, t) - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (1)$$

Nous obtenons une équation d'onde, qui n'est pas l'équation de d'Alembert.

3. Écrivons que l'onde

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$$

est solution de l'équation d'onde précédente. Après simplification par $\exp(i(\omega t - \underline{k}x))$, on obtient

$$-\omega^2 \frac{mL^2}{3} \underline{A} = \left[-\underline{k}^2 Cd^2 - \frac{mgL}{2} + i\omega\alpha \right] \underline{\theta}_0.$$

L'onde cherchée est solution si $\underline{\theta}_0 \neq 0$, soit si :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} - i \frac{\omega\alpha}{Cd^2}. \quad (2)$$

Cette relation entre $\underline{k}$ et ω est appelée relation de dispersion.

4.a) Si $\alpha = 0$, la relation de dispersion (2) devient :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} = \frac{mL^2}{3Cd^2} \left[\omega^2 - \frac{3g}{2L} \right].$$

Elle est de la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

avec

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2}}.$$

4.b) Si $\omega > \omega_c$, on a $\underline{k}^2 > 0$. Le nombre d'onde est réel :

$$k'(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2} \left[\omega^2 - \frac{3g}{2L} \right]}.$$

Il y a propagation. La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2 - \frac{3mgL}{2\omega^2}}}.$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation : **la propagation est dispersive**. Comme $k'' = 0$, il n'y a pas absorption.

Si $\omega < \omega_c$, on a $\underline{k}^2 < 0$. Le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$k = ik'' = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c},$$

soit

$$k'' = \pm \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2} \left[\frac{3g}{2L} - \omega^2 \right]}.$$

Il y a donc absorption. Comme $k' = 0$, **il n'y a pas propagation**.

5. Si ω est élevé, on peut négliger le terme constant devant le terme en ω^2 de la partie réelle de $\underline{k}^2$ dans la relation (2). Il faut donc

$$\frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 \gg \frac{mgL}{2Cd^2}$$

soit

$$\omega \gg \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

Cela revient à

$$\omega \gg \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

La pulsation de l'onde doit être grande devant la pulsation propre de chaque pendule pesant.

5.a)

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 - \frac{i\alpha}{Cd^2}\omega = \frac{mL^2\omega^2}{3Cd^2} \left[1 - i \frac{3\alpha}{mL^2\omega} \right].$$

Le terme sans dimension $\frac{3\alpha}{mL^2\omega}$ peut être considéré comme un infiniment petit quand ω est grand, d'où la linéarisation :

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{mL^2\omega^2}{3Cd^2} \left[1 - i \frac{3\alpha}{mL^2\omega} \right]^{\frac{1}{2}}} \approx \sqrt{\frac{mL^2\omega^2}{3Cd^2} \left[1 - i \frac{3\alpha}{2mL^2\omega} \right]}.$$

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$\underline{k}(\omega) = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2}}\omega - i\alpha\sqrt{\frac{3}{4mL^2Cd^2}} = k'(\omega) + ik''(\omega)$$

avec :

$$k'(\omega) = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2}}\omega \quad \text{et} \quad k''(\omega) = -\alpha\sqrt{\frac{3}{4mL^2Cd^2}}.$$

5.b) Comme $k' \neq 0$, il y a propagation. La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2}}.$$

Elle est indépendante de ω : **la propagation n'est pas dispersive.**

5.c) On a $k''(\omega) < 0$ (avec $k'(\omega) > 0$) : il y a absorption. On remarque que l'absorption est d'autant plus importante que le coefficient α caractéristique du couple de frottement est grand, ce qui était prévisible.

5.d) Si $\alpha = 0$, on a $k'' = 0$: on a un phénomène de propagation non dispersif, sans absorption. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2.$$

Considérer ω grand revient à négliger le terme dû à la pesanteur. L'équation d'onde est alors donnée par

$$\frac{mL^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

On retrouve l'équation de d'Alembert, qui décrit bien un phénomène non dispersif, sans absorption.

4 — Corde vibrante verticale

1. Considérons l'élément de corde compris en l'abscisse z et l'extrémité $z = L$, de masse $m = \lambda(L - z)$. Il est soumis :

- à son poids $m\vec{g} = \lambda(L - z)g\vec{e}_z$;
- à la tension $\vec{T} = -T(z)\vec{e}_z$ au point de jonction avec la partie supérieure de la corde.

L'élément de corde étant au repos, la condition d'équilibre s'écrit, en projection sur $\vec{e}_z$:

$$\lambda(L - z)g - T(z) = 0, \quad (3)$$

d'où

$$T(z) = \lambda(L - z)g.$$

2. On note $\alpha(z, t)$ l'angle que fait la tangente à la corde en z avec la verticale; on considère des oscillations de faible amplitude : $|\alpha| \ll 1$. La projection selon $\vec{e}_z$ du principe de la dynamique appliqué à l'élément de corde précédent conduit à

$$0 = \lambda g dz + T(z + dz, t) \cos \alpha(z + dz, t) - T(z) \cos \alpha(z, t) \\ \simeq \lambda g dz + T(z + dz, t) - T(z, t)$$

On retrouve l'équation(3); au premier ordre, la tension reste indépendante du temps et est donnée par $T(z) = \lambda(L - z)g$.

La projection selon $\vec{e}_x$ du principe de la dynamique s'écrit :

$$\lambda dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin \alpha(z + dz, t) - T(z) \sin \alpha(z, t) \\ \simeq T(z + dz)\alpha(z + dz, t) - T(z)\alpha(z, t) \\ = \frac{\partial(T(z)\alpha(z, t))}{\partial z} dz.$$

Comme $\alpha(z, t) \simeq \tan \alpha(z, t) = \frac{\partial x}{\partial z}$, on a

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(L - z)g \frac{\partial x}{\partial z} \right] = -\lambda g \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

L'équation d'onde s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

3. En tenant compte du frottement visqueux, le principe de la dynamique s'écrit, en projection sur $\vec{e}_x$:

$$\lambda dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z+dz) \sin \alpha(z+dz, t) - T(z) \sin \alpha(z, t) - \alpha \frac{\partial x}{\partial t} dz.$$

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, on obtient :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial x}{\partial t}.$$

4. Avec la solution proposée, l'équation d'onde s'écrit

$$-\omega^2 \underline{x}_0 = -k^2 g(L-z) \underline{x}_0 + i k g \underline{x}_0 - i \omega \frac{\alpha}{\mu} \underline{x}_0$$

Elle admet une solution $\underline{x}_0 \neq 0$ si :

$$\omega^2 - k^2 g(L-z) + i \left[k g - \omega \frac{\alpha}{\mu} \right] = 0.$$

Le complexe $\omega^2 - k^2 g(L-z) + i \left[k g - \omega \frac{\alpha}{\mu} \right]$ est nul si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont nulles.

On a donc d'une part $k g - \omega \frac{\alpha}{\mu} = 0$, d'où la valeur du coefficient de frottement $\alpha_0 = g \mu \frac{k}{\omega}$.

D'autre part, on a $\omega^2 - k^2 g(L-z) = 0$, d'où

$$\omega = k \sqrt{g(L-z)} \simeq k \sqrt{gL}$$

avec $z \ll L$. On a donc $\alpha_0 = g \mu \frac{k}{k \sqrt{gL}}$, soit

$$\alpha_0 = \mu \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

5. Si $\alpha = \alpha_0$, on a $\omega = k \sqrt{g(L-z)} \simeq k \sqrt{gL}$, et la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ est donnée par $v_\varphi = \sqrt{gL}$.

La vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ est alors donnée par

$$v_g = \sqrt{gL}.$$

On a $v_\varphi = v_g$ indépendant de la pulsation ω : petit fond grisil n'y a pas dispersion.

6. Avec la solution proposée, l'équation d'onde s'écrit

$$-\omega^2 \underline{a} = i \underline{k} g \underline{a} - g(L-z) \underline{k}^2 \underline{a} \simeq i \underline{k} g \underline{a} - g L \underline{k}^2 \underline{a}$$

en négligeant les frottements et si $z \ll L$. Le nombre d'onde $\underline{k}$ doit donc vérifier l'équation

$$gL \underline{k}^2 - i g \underline{k} - \omega^2 = 0.$$

En posant $\underline{k} = k_1 + i k_2$, on a donc

$$gL(k_1^2 - k_2^2 + 2i k_1 k_2) - i g(k_1 + i k_2) - \omega^2 = 0$$

soit :

$$gL(k_1^2 - k_2^2) + g k_2 - \omega^2 + i g k_1 (2L k_2 - 1) = 0. \quad (4)$$

La partie imaginaire de l'équation (4) doit être nulle,

$$\text{d'où } k_2 = \frac{1}{2L}.$$

La solution $k_1 = 0$ est à rejeter car elle ne correspond pas à une onde se propageant.

L'élongation s'écrit alors

$$\underline{x}(z, t) = \underline{x}_0 \exp(i(\omega t - k_1 z - i k_2 z)) = \underline{x}_0 \exp(k_2 z) \exp(i(\omega t - k_1 z))$$

avec $k_2 > 0$. L'amplitude de l'onde augmente comme $\exp(k_2 z)$ pendant la propagation.

À la question 4, nous avons trouvé qu'une onde progressive (non amortie) pouvait exister avec des frottements, si le coefficient de frottement a la valeur α_0 .

Il est donc cohérent de trouver une augmentation de l'amplitude en l'absence de frottement ; ce terme d'amplification s'oppose exactement au terme de frottement lorsque $\alpha = \alpha_0$.

7. La partie imaginaire de l'équation (4) étant nulle, on obtient la relation de dispersion :

$$gL(k_1^2 - k_2^2) + g k_2 - \omega^2 = 0$$

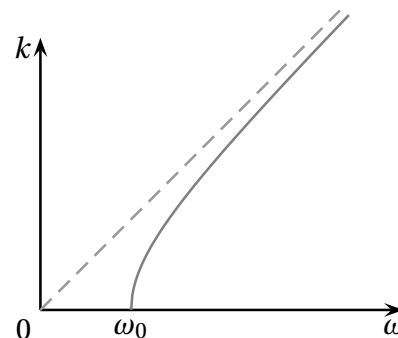
avec $k_2 = \frac{1}{2L}$, soit $k_1^2 + \frac{1}{4L^2} - \frac{\omega^2}{gL} = 0$.

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{4L}$, on a $4L k_1^2 + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0$, d'où :

$$k_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}.$$

Pour que k_1 soit réel, il faut donc $\omega > \omega_0$: la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

Représentons le nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω :



La courbe $k(\omega)$ est une branche d'hyperbole, admettant pour asymptote la droite $k = \frac{\omega}{\sqrt{gL}}$.

8. On a $k_1^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4L^2 \omega_0^2} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{gL}$. En différenciant cette relation, on obtient $2k_1 dk_1 = \frac{2\omega d\omega}{gL}$, soit $\frac{\omega}{k_1} \frac{d\omega}{dk_1} = gL$.

On a donc $v_\varphi v_g = gL$.