Physique des ondes Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Annexe : propagation d'un paquet d'onde dans un milieu faiblement dispersif

Le paquet d'onde s'écrit

$$\underline{s}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \underline{\hat{S}}(\omega) \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - kx)\right) \mathrm{d}\omega\,, \tag{1}$$

où $\underline{\hat{S}}(\omega)$ est le spectre de l'onde, d'une largeur de $\Delta\omega$ autour de ω_0.
La largeur spectrale $\Delta\omega$ étant petite et le milieu étant faiblement dispersif, on peut linéariser la relation de dispersion au voisinage de la pulsation centrale ω_0 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} = k_0 + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}$$

en notant $k_0 = k(\omega_0)$. Le terme exponentiel de l'intégrale (1) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\mathrm{i}(\omega t - kx)\right) &= \exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t - \left[k_0 + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right]x\right)\right] \\
&= \exp\left[\mathrm{i}\left((\omega-\omega_0)t + \omega_0 t - k_0 x - x(\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right] \quad \text{(on fait apparaître } \omega_0 t\text{)} \\
&= \exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 x) + \mathrm{i}(\omega-\omega_0)\left(t - x\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right] \\
&= \exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 x)\right]\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\left(t - x\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right].
\end{aligned}$$

Le terme $\exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 x)\right]$ étant indépendant de ω, il peut être factorisé hors de l'intégrale, qui s'écrit :

$$\underline{s}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 x)\right] \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \underline{\hat{S}}(\omega) \exp\left[\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\left(t - \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}x\right)\right]\mathrm{d}\omega\,.$$

L'intégrale, facteur du terme $\exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 x)\right]$, est une fonction de x et de t qui est de la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \underline{\hat{S}} \exp\left[\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\left(t - \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}x\right)\right]\mathrm{d}\omega = F\left(t - \frac{x}{\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}}\right) = F\left(t - \frac{x}{v_\mathrm{g}}\right),$$

en posant $v_\mathrm{g} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$.

Lors de sa propagation dans un milieu faiblement dispersion, le paquet d'ondes s'écrit sous la forme

$$\underline{s}(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v_\mathrm{g}}\right)\exp\left(\mathrm{i}\omega_0\left[t - \frac{x}{\frac{\omega_0}{k_0}}\right]\right).$$

Le terme exponentiel correspond à une onde harmonique, se propageant à la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{k_0}$, modulée par une enveloppe F se propageant à la vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$.