TD d'électromagnétisme n° 2 — Théorème de Gauss

1 — Distribution à symétrie cylindrique

Pour chacune des distributions suivantes :

— déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace, et représenter graphiquement l'évolution spatiale de sa composante ;

— déterminer le potentiel électrique $V(M)$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement son évolution spatiale.

1. On considère un fil infini selon Oz, portant la densité linéique de charge uniforme λ_0.

2. On considère un cylindre infini d'axe Oz, de rayon a, portant la densité volumique de charge

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a}.$$

3. On considère un cylindre infini d'axe Oz, de rayon a, chargé sur sa surface avec la densité surfacique uniforme σ_0.

2 — Distribution à symétrie sphérique

Pour chacune des distributions suivantes :

— déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace, et représenter graphiquement l'évolution spatiale de sa composante ;

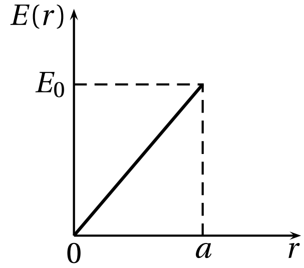
— déterminer le potentiel électrique $V(M)$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement son évolution spatiale.

1. On considère une sphère de rayon a portant la densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)$ en coordonnées sphériques.

2. On considère une sphère de rayon a, chargée sur sa surface avec la densité surfacique uniforme σ_0.

3 — Champ créé par un cylindre chargé

On considère un cylindre infini de rayon a. On donne le graphe du champ électrique en un point M à une distance $r < a$ de l'axe du cylindre :



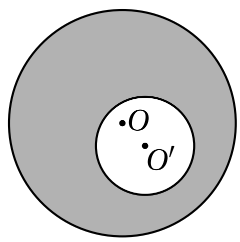
1. Montrer que ce champ est compatible avec une densité volumique de charge ρ_0 uniforme à l'intérieur du cylindre, dont on donnera l'expression.

2. Déterminer le champ électrique en un point M situé à une distance $r > a$ de l'axe.

3. En déduire $V(M)$ en tout point de l'espace. Représenter le graphe de $V(r)$.

4 — Champ dans une cavité sphérique

Une sphère de centre O et de rayon a est chargée avec une densité volumique ρ_0 uniforme. Elle comporte une cavité sphérique, vide de charges, de centre O' et de rayon b.



Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de la cavité.

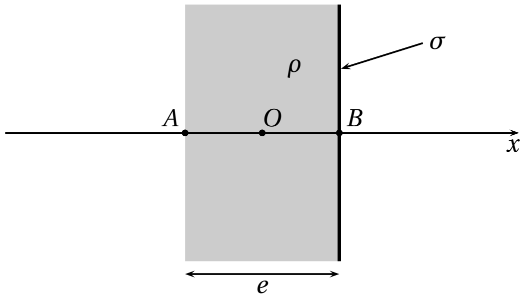
Indications : on utilisera le principe de superposition, et on exprimera le champ électrique en fonction du vecteur position, sans faire référence au système de coordonnées.

5 — Deux plans de charges opposées

Calculer le champ électrostatique créé par deux plans infinis, distants de d, portant les densités surfaciques de charges uniformes σ et $-\sigma$.

6 — Nappe épaisse

Une nappe « épaisse » chargée uniformément avec la densité volumique de charge ρ s'étend entre les plans $x = -\frac{e}{2}$ et $x = +\frac{e}{2}$. Une nappe « fine » chargée uniformément avec la densité surfacique de charge σ s'étend sur tout le plan $x = +\frac{e}{2}$.



1. Déterminer une relation entre ρ, σ et e sachant que le système est globalement neutre.

2. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.

3. Déterminer la tension U_{AB}.

7 — Couche chargée

On considère une couche infinie, comprise entre $z = -a$ et $z = +a$, portant la densité volumique de charges $\rho(z)$. On demande de déterminer le champ $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace dans les cas suivants, et de représenter graphiquement l'évolution de sa composante spatiale.

1. $\rho(z) = \rho_0$.
Discuter de la limite $a \to 0$ avec $a\rho_0 = \text{cte}$.

2. $\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } z \geqslant 0 \\ -\rho_0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$

3. $\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)$.

8 — Modèle de l'atome

Un ancien modèle de l'atome le décrit comme étant constitué d'un noyau (boule de centre O, de charge e, de rayon $a = 100$ pm) à l'intérieur duquel gravite un électron (charge ponctuelle $-$e). On note $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

1. Montrer que le potentiel créé par la boule est

$$V(r < a) = \frac{\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}\right) \text{ et } V(r > a) = \frac{\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

2. Donner l'expression de l'énergie d'ionisation de l'atome (énergie nécessaire pour envoyer l'électron à l'infini). La calculer et la comparer à celle de l'atome d'hydrogène (13,6 eV).

3. Étudier le mouvement de l'électron autour de sa position d'équilibre. Et dégager notamment la pulsation ω_0 des petites oscillations. À quel domaine appartient la fréquence associée ?

Indication : on commencera par chercher le champ $\vec{E}(M)$ créé par la boule.

9 — Potentiel de Yukawa

En tout point M de l'espace, le potentiel électrostatique a pour expression en coordonnées sphériques

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r/a}.$$

1. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

2. Déterminer le flux $\Phi(r)$ de $\vec{E}(M)$ à travers une surface sphérique de rayon r et de centre O. En déduire la charge $Q(r)$ comprise dans une sphère de rayon r.

3. Déterminer $\lim_{r\to 0} Q(r)$. Conclusion ?

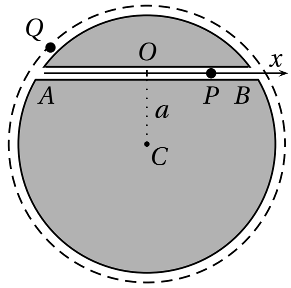
4. Déterminer $\lim_{r\to\infty} Q(r)$. Conclusion ?

5. Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ régnant dans l'espace.

6. Que pourrait modéliser une telle distribution ?

10 — Oscillations dans un tunnel

Un astre sphérique de masse M uniformément répartie et de rayon R est percé d'un tunnel rectiligne AB.

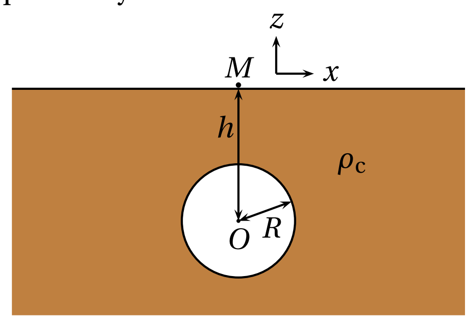


Un objet de masse m assimilé à une particule ponctuelle P, peut se déplacer sans frottement dans le tunnel.
Un satellite Q est en orbite circulaire à une altitude négligeable.

À $t = 0$, le satellite Q est en A, et l'objet P est lâché du point A, avec une vitesse nulle.
Les points P et Q se rencontreront-ils périodiquement (en A ou en B) ? Si oui, calculer la périodicité de leurs rencontres.
On négligera la rotation de l'astre sur lui-même.

11 — Gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des champs gravitationnels.
On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.
Dans un sol calcaire, de masse volumique ρ_c, une cavité a été créée par la lente dissolution de la roche et par l'écoulement souterrain qui évacue les matières dissoutes au fur et à mesure. On considère la cavité comme vide de matière, et sphérique de rayon R.



1. En utilisant le théorème de superposition, exprimer la variation du champ de gravité (appelée « anomalie gravimétrique ») à la verticale du centre de la cavité (au point M de la figure) du fait de l'existence de cette cavité.

2. On fait varier l'abscisse x du point M tout en restant au niveau du sol. Sans calcul supplémentaire, donner l'allure du graphe représentant l'anomalie gravimétrique verticale en fonction de x.

3. Comment les résultats sont-ils modifiés su la cavité est remplie d'eau de masse volumique ρ_e ?

4. L'unité utilisée pour quantifier l'anomalie gravimétrique est le gal, avec 1 Gal = 1 cm $\cdot$ s^{-2}. On utilise un gravimètre portatif permettant d'atteindre une résolution effective d'environ 10 μGal.

Ce gravimètre est-il capable de détecter une cavité de 5 m de rayon, située à 10 m de profondeur ?

On donne $\rho_c = 2{,}6$ g $\cdot$ cm^{-3}.

12 — Grotte alors !

1. Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation.

2. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(M)$ créé en tout point M *intérieur* à une planète sphérique homogène de centre O, de rayon R et de masse volumique uniforme ρ_0.

3. On considère maintenant que cette planète possède une grotte sphérique de centre C et de rayon a.

Deux explorateurs pénètrent dans le grotte ; ils se trouvent aux points A et B.

Chacun laisse tomber une pierre de masse m. Déterminer la trajectoire de chacune des pierres. Laquelle touche l'autre extrémité de la grotte en premier ?