

Partie I : Nuisances sonores (CCINP PC 2023)

1 — Correction acoustique et théorie de la réverbération de Sabine

Q 1. L'approximation acoustique porte sur les champs d'indice 1 caractéristiques de l'onde sonore :

- ce sont des infiniment petits du même ordre :
 $|\rho_1| \ll \rho_0, |p_1| \ll P_0$ et $\|\vec{v}_1\| \ll c$;
- leurs dérivées spatiale et temporelle sont aussi des infiniment petits du même ordre;
- leur moyenne temporelle est nulle : $\langle p_1(M, t) \rangle = 0$;
 $\langle \rho_1(M, t) \rangle = 0$ et $\langle \vec{v}_1(M, t) \rangle = \vec{0}$.

De plus :

- la pesanteur est négligée;
- les phénomènes dissipatifs sont négligés : le fluide est considéré comme parfait, les particules de fluide suivant une évolution isentropique.

Q 2. L'équation d'Euler s'écrit

$$(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 \right) = -\text{grad}(p_0 + p_1).$$

En linéarisant dans le cadre de l'approximation acoustique, on obtient

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} p_1(x, t),$$

soit en projetant selon \vec{e}_x

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Q 3. La conservation de la masse s'écrit sous la forme locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

soit

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1) = 0.$$

La linéarisation conduit à

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0,$$

soit

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0.$$

Q 4. Démonstration simplifiée

L'évolution des particules de fluide étant isentropique, on peut écrire

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S = \frac{\rho - \rho_0}{p - p_0} = \frac{\rho_1}{p_1} = \rho \chi_S = (\rho_0 + \rho_1) \chi_S$$

soit

$$\rho_1 = (\rho_0 + \rho_1) p_1 \chi_S$$

qui se linéarise en

$$\rho_1 = \rho_0 \chi_{S,0} p_1,$$

où $\chi_{S,0} = \chi_S(p_0)$.

Démonstration plus précise

Au voisinage de p_0 , on peut écrire au premier ordre.

$$\rho(p) = \rho(p_0 + p_1) = \rho(p_0) + p_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S(p_0)$$

Comme $\rho = \rho_0 + \rho_1$ où $\rho_0 = \rho(p_0)$ en l'absence d'onde, on obtient

$$\rho_1 = p_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S(p_0) = \rho p_1 \chi_{S,0} = (\rho_0 + \rho_1(x, t))_0 \chi_{S,0}.$$

On retrouve ensuite le résultat précédent par linéarisation.

Q 5. Le bilan de masse peut s'écrire

$$\rho_0 \chi_{S,0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

On a donc

$$\rho_0 \chi_{S,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}.$$

D'après l'équation d'Euler linéarisée

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

d'où

$$\rho_0 \chi_{S,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{S,0}}}.$$

Q 6. La loi de Laplace s'écrit $PV^\gamma = \text{cte}$. Pour une masse m de gaz, on a $m = \rho V$; on a donc $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$.

La différentielle logarithmique de la relation de Laplace $p\rho^{-\gamma} = \text{cte}$ s'écrit

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

d'où pour une évolution à S constante

$$\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{dp}{dp} S = \gamma \frac{\rho}{p}.$$

On a donc

$$\chi_{S,0} = \frac{1}{\gamma \rho_0}.$$

La célérité s'écrit alors

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

Q 7. L'équation d'Euler linéarisée de la question 2 s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -k p_{1,m} \sin(\omega t - kx).$$

Intégrons par rapport au temps :

$$\rho_0 v_1 = \frac{k}{\omega} p_{1,m} \cos(\omega t - kx) = \frac{k}{\omega} p_1.$$

Comme $k = \omega/c$, on obtient $p_1 = \rho_0 c v_1$, d'où

$$Z_c = \rho_0 c.$$

Dans le cas d'une onde se propageant dans le sens inverse (terme propagatif en $\omega t + kx$), on a

$$p_1 = -\rho_0 c v_1.$$

Q 8. Le terme $\frac{1}{2} \rho_0 \langle v_1^2 \rangle_T$ correspond à la densité volumique d'énergie cinétique.

Le terme $\frac{1}{2} \chi_{S,0} \langle p_1^2 \rangle_T$ correspond à la densité volumique d'énergie potentielle associée aux forces de pression.

Pour l'onde considérée, on a d'une part

$$\langle p_1^2 \rangle_T = p_{1,m}^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{2}$$

et d'autre part

$$\langle v_1^2 \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{\rho_0^2 c^2} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{2 \rho_0^2 c^2}.$$

On a donc

$$\langle e \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{4 \rho_0 c^2} + \frac{\chi_{S,0} p_{1,m}^2}{4} = \frac{p_{1,m}^2}{4 \rho_0 c^2} + \frac{p_{1,m}^2}{4 \rho_0 c^2}$$

soit

$$\langle e \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{2 \rho_0 c^2}.$$

Q 9. La pression étant homogène à une force surfacique, on a dimensionnellement

$$[I] = \frac{[F]}{[S]} [v].$$

Une puissance étant homogène à $[F][v]$, l'intensité sonore est bien homogène à une **puissance surfacique**.

On a

$$p_1 v_1 = \frac{p_{1,m}^2}{\rho_0 c} \cos^2(\omega t - kx),$$

d'où

$$\langle p_1 v_1 \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{2 \rho_0 c} = \langle e \rangle_T c.$$

On a donc

$$I = \langle e \rangle_T c.$$

Q 10. Le coefficient d'absorption est défini par

$$\alpha_m = \frac{\mathcal{P}_a}{\mathcal{P}_{\text{inc}}}$$

où \mathcal{P}_{inc} est la puissance incidente sur les parois et \mathcal{P}_a la puissance absorbée.

La puissance incidente provient du champ réverbéré sur les parois de surface totale S , soit

$$\mathcal{P}_{\text{inc}} = S I_r.$$

On a donc

$$\mathcal{P}_a = \alpha_m S I_r.$$

L'énergie sonore moyenne totale dans la pièce est donnée par

$$\mathcal{E}(t) = \langle e_r \rangle_T V$$

soit

$$\mathcal{E}(t) = \frac{4 I_r}{c} V.$$

Q 11. La variation d'énergie sonore dans la pièce pendant dt est reliée à la puissance absorbée par

$$d\mathcal{E} = -\mathcal{P}_a dt$$

soit

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{4V}{c} \frac{dI_r}{dt} = -\mathcal{P}_a = -\alpha_m S I_r.$$

On a donc

$$\frac{dI_r}{dt} + \frac{\alpha_m S c}{4V} I_r = 0.$$

On en déduit par intégration

$$I_r(t) = I_{r,0} e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4V}{\alpha_m S c}.$$

Q 12. On a

$$\Delta L_I = L_I(T_r) - L_I(0) = 10 \log \frac{I(T_r)}{I(0)} = 10 \log(e^{-T_r/\tau}) = -60$$

On a donc $\log e^{-T_r/\tau} = -6$, soit $e^{-T_r/\tau} = 10^{-6}$.

Finalement

$$T_r = 6\tau \ln(10).$$

Avec l'expression de τ établie, on a

$$T_r = \frac{24 \ln(10)}{c} \frac{V}{\alpha_m c}.$$

On calcule

$$\frac{24 \ln(10)}{c} = \frac{25 \ln(10)}{340} = 0,16 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On retrouve bien la formule semi-numérique de Sabine

$$T_r = 0,16 \frac{V}{\alpha_m S}.$$

Q 13. Le temps de réverbération donné pour la salle vide permet de déterminer le coefficient $\alpha_{m,v}$ correspondant.

Le volume de la salle est

$$V = 25 \times 20 \times 10 = 5000 \text{ m}^3.$$

La surface totale des parois (il y en a 6 : 4 murs, le sol et le plafond) est

$$S = 2 \times (20 \times 25 + 25 \times 10 + 20 \times 10) = 1900 \text{ m}^2.$$

On a alors

$$\alpha_{m,v} = 0,16 \frac{V}{T_r S} = 0,16 \times \frac{5000}{5 \times 1900}$$

soit $\alpha_{m,v} = 0,084$.

Quand la pièce est pleine, le public est... sur le sol! On garde donc le coefficient $\alpha_{m,v}$ précédemment calculé pour les murs et le plafond, de surface totale

$$S_{mp} = 20 \times 25 + 2 \times (20 \times 10 + 25 \times 10) = 1400 \text{ m}^2$$

et on prend le coefficient $\alpha_{m,p}$ pour le sol de surface $S_s = 20 \times 25 = 500 \text{ m}^2$.

On a donc

$$T_r = 0,16 \frac{V}{\alpha_{m,v} S_{mp} + \alpha_{m,p} S_s}.$$

On calcule

$$T_r = 0,16 \times \frac{5000}{0,084 \times 1400 + 0,9 \times 500}$$

soit $T_r = 1,4 \text{ s}$.

D'après le document, pour écouter de la musique symphonique dans un volume de 5000 m^3 , le temps de réverbération optimal est de $1,7 \text{ s}$.

Si la pièce vide présente un temps de réverbération trop important, **la présence d'un public permet une qualité d'écoute du concert satisfaisante.**

2 — Principe d'un silencieux à résonateur de Helmholtz

Q 14. La résultante des forces pressantes sur la tranche d'air est

$$\vec{F}_p = [p_0 - p_c(t)] s \vec{u}_x.$$

L'évolution étant isentropique et l'air assimilé à un gaz parfait, il suit la loi de Laplace :

$$p_c(t) (V_c - sx(t))^\gamma = p_0 V_c^\gamma$$

soit

$$p_c(t) = p_0 \left(1 - \frac{sx(t)}{V_c} \right)^{-\gamma}$$

Comme $\ell s \ll V_c$, on a $s|x(t)| \ll V_c$ ce qui permet de linéariser

$$p_c(t) = p_0 \left(1 + \frac{\gamma sx(t)}{V_c} \right).$$

La résultante des forces pressantes s'écrit alors

$$\vec{F}_p = - \frac{\rho_0 \gamma s}{V_c} sx \vec{u}_x.$$

D'après l'expression de c établie à la question **Q6** on a

$$\gamma p_0 = \rho_0 c^2$$

d'où

$$\vec{F}_p = - \frac{\rho_0 c^2 s^2}{V_c} x \vec{u}_x.$$

On a donc

$$\vec{F}_p = -kx \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{\rho_0 c^2 s^2}{V_c}.$$

Q 15. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse d'air dans le colle s'écrit, en projection selon \vec{u}_x

$$\rho_0 s \ell \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

soit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\rho_0 s \ell} x = 0.$$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique de pulsation propre donnée par

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho_0 s \ell} = \frac{c^2 s}{\ell V_c}.$$

La fréquence propre de ce système oscillant est donc

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}}.$$

Q 16. Dans le cadre du modèle considéré précédemment, on s'attendu à un **signal sinusoïdal**.

On observe des **oscillations amorties** : il existe des phénomènes dissipatifs (viscosité de l'air) qui n'ont pas été pris en compte dans notre modèle.

Quand un oscillateur linéaire n'est pas trop amorti, le nombre d'oscillations visibles est sensiblement égal au facteur de qualité.

On compte une vingtaine d'oscillations, donc $Q \approx 20$.

Complément

L'oscillateur linéaire amorti est décrit par

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Le régime pseudo-périodique correspond au cas où

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0.$$

La pseudo-pulsation vaut alors

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Le régime est décrit par

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\Omega t + \varphi).$$

Le régime étant peu amorti (beaucoup d'oscillations visibles), on peut considérer $Q \gg 1$, donc $\Omega \approx \omega_0$.

Considérons deux instants séparés d'un nombre n de périodes : $t_2 - t_1 = nT = \frac{2\pi n}{\Omega} \approx \frac{2\pi n}{\omega_0}$. On a

$$x(t_2) = x(t_1) e^{-\frac{n\omega_0 T}{2Q}} = x(t_1) e^{-n\pi/Q},$$

d'où

$$Q = \frac{n\pi}{\ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)}}.$$

Une lecture sur 9 périodes donne

$$Q = \frac{9\pi}{\ln(1,8/0,4)} \approx 19.$$

Au bout d'un nombre d'oscillations de l'ordre de Q , on a

$$e^{-n\pi/Q} = e^{-\pi} \approx 0,04.$$

L'amplitude est 4 % de l'amplitude initiale : les oscillations ne sont plus visibles, d'où le critère donné dans la réponse initiale.

Q 17. La fréquence théorique attendue est

$$f_{0,th} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{343^2 \times 1,89 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-2} \times 791 \times 10^{-6}}}$$

soit $f_{0,th} = 119 \text{ Hz}$.

On mesure 10 oscillations sur une durée de 0,1 s, soit une fréquence $f_{0,exp} = 100 \text{ Hz}$, plus basse que la valeur attendue.

Si on prend en compte les couches d'air de part et d'autre du col, cela revient à considérer une masse d'air plus grande, donc une fréquence propre plus faible de l'oscillateur.

Q 18. La pression à l'entrée du col étant $p_0 + p(t)$, la résultante des forces pressante sur le col est

$$\vec{F}_p = [p_0 + p(t) - p_c(t)]s \vec{u}_x$$

qui se linéarise selon

$$\vec{F}_p = \left(p(t) - \frac{p_0 \gamma s x}{V_c} \right) s \vec{u}_x.$$

L'équation du mouvement devient alors

$$\rho_0 s \ell \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{p_0 \gamma s^2}{V_c} x + p(t)s$$

soit après simplification

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \frac{s}{\rho_0 s \ell} p(t).$$

En notation complexe, on obtient

$$-\omega^2 \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{s}{\rho_0 s \ell} p_m e^{j\omega t}.$$

On a donc

$$\underline{x}(t) = \frac{p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)} e^{j\omega t}.$$

Comme $v(t) = \frac{dx}{dt}$, on a

$$\underline{v}_m = j\omega \underline{x}(t),$$

d'où

$$\underline{v}_m = \frac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

On a

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |\underline{v}_m| = \infty.$$

Les phénomènes dissipatifs limite l'amplitude maximale de la vitesse (on a un oscillateur amorti au lieu d'un oscillateur linéaire).

Q 19. D'après la question **Q7**, on a

$$\underline{v}_i(z, t) = \frac{p_{i,m} e^{j(\omega t - kz)}}{Z_c};$$

$$\underline{v}_r(z, t) = -\frac{p_{r,m} e^{j(\omega t + kz)}}{Z_c}$$

et

$$\underline{v}_t(z, t) = \frac{p_{t,m} e^{j(\omega t - kz)}}{Z_c}.$$

Q 20. En l'absence de paroi mobile massique, la pression est continue dans le fluide au niveau de l'entrée du col en $z = 0$, soit

$$p_p = p_{i,m} + p_{r,m} \quad \text{et} \quad p_p = p_{t,m}.$$

Le débit volumique franchissant la section S juste avant le résonateur ($z = 0^-$) est égal à la somme du débit volumique sortant en $z = 0^+$ dans le grand tuyau et du débit volumique dans le col du résonateur, soit

$$S[\underline{v}_i(0, t) + \underline{v}_r(0, t)] = S\underline{v}_t(0, t) + s\underline{v}(t).$$

On a donc

$$S \left[\frac{p_{i,m} - p_{r,m}}{Z_c} \right] = S \frac{p_{t,m}}{Z_c} + s\underline{v}_m$$

soit

$$p_{i,m} - p_{r,m} = p_{t,m} + \frac{sZ_c}{S} \underline{v}_m.$$

Q 21. On a

$$\left| \frac{p_{t,m}}{p_{i,m}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\beta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

On en déduit

$$L_{LT} = 10 \log \left[1 + \frac{1}{4\beta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right]$$

Q 22. La courbe représente l'atténuation du signal. Une valeur élevée correspond à une atténuation importante. Le résonateur de Helmholtz est donc un **filtre coupe-bande**.

En comparant les deux graphes, on voit que pour une même valeur de β , le filtre est plus sélectif (bande passante étroite) si α est plus petit.

Une grande valeur de α permet d'avoir une perte de transmission importante sur un plus large intervalle de fréquences.

Partie II : membranes élastiques — Figures de Chladni (E3A PSI 2021)

Q 1. La poudre s'accumule sur les zones immobiles de la plaque : **les lignes noires représentent les nœuds de vibration**.

Q 2. Écrivons que $z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ vérifie l'équation d'onde :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y(y) T(t) + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} T(t) - \frac{1}{c^2} X(x) Y(y) \frac{d^2 T}{dt^2} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

Le membre de gauche est indépendant de y et t , tandis que le membre de droite ne dépend pas de x . Le membre de gauche est donc aussi indépendant de x , donc égal à une constante :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = A.$$

On a donc

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - AX(x) = 0.$$

En notant $A = \mp \alpha^2$ pour discuter de son signe, on a donc

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \pm \alpha^2 X = 0.$$

On fait le même raisonnement en isolant $\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2}$ qui doit être constant, d'où

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} \pm \beta^2 Y = 0.$$

Q 3. Pour le cas $\frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha^2 X = 0$, la solution générale est de la forme

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

Les conditions aux limites $X(0) = X(a) = 0$ s'écrivent donc

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad Ae^{\alpha a} + Be^{-\alpha a} = 0.$$

On en déduit

$$A(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) = 0$$

d'où $A = 0$ et donc $B = 0$. Cette solution ne peut donc satisfaire aux conditions aux limites.

La conclusion est identique pour l'équation différentielle vérifiée par $Y(y)$ qui est de la même forme, avec des conditions aux limites similaires.

► On peut écrire la solution sous la forme

$$X(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x).$$

On doit avoir $X(0) = 0 = A$, d'où $A = 0$. La conditions $X(a) = 0 = B \sinh(\alpha a)$ entraîne $B = 0$.

Q 4. Les équations différentielles à considérer sont donc

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0.$$

Les solutions générales sont

$$X(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x)$$

et

$$Y(y) = B_1 \cos(\alpha y) + B_2 \sin(\alpha y).$$

On a d'une part

$$X(0) = A_1 = 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = B_1 = 0$$

d'où

$$X(x) = A_2 \sin(\alpha x) \quad \text{et} \quad Y(y) = B_2 \sin(\alpha y).$$

D'autre part

$$X(a) = A_2 \sin(\alpha a) = 0 \quad \text{et} \quad Y(b) = B_2 \sin(\alpha b) = 0.$$

Comme $A_2 \neq 0$ et $B_2 \neq 0$, on doit avoir

$$\sin(\alpha a) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\alpha b) = 0.$$

On doit donc avoir

$$\alpha a = n\pi \quad \text{avec} \quad m \in \mathbf{N}^*$$

et

$$\alpha b = m\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Finalement, en notant $X_0 = A_2$ et $Y_0 = B_2$, on obtient

$$X(x) = X_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad \text{et} \quad Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Q 5. Avec

$$z(x, y, t) = X_0 Y_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) T(t),$$

l'équation d'onde s'écrit en simplifiant

$$\left(-\frac{\pi^2 m^2}{a^2} - \frac{\pi^2 n^2}{b^2}\right) T(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

soit

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) T(t) = 0.$$

Elle est de la forme

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + [(\alpha^2 + \beta^2)c^2] T = 0$$

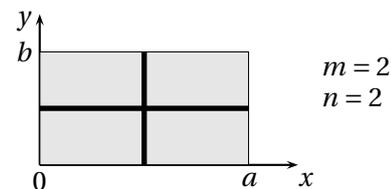
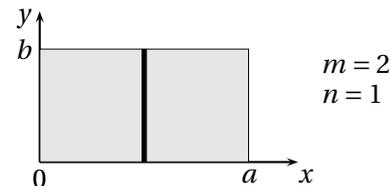
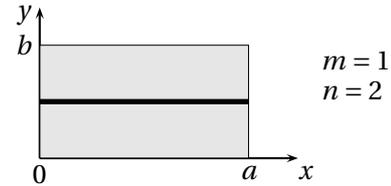
avec

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n\pi}{b}.$$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation propre

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

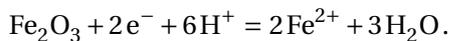
Q 6. L'expression $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ s'annule en $x = 0$ et $x = a$ pour $m = 1$. Pour $m = 2$, elle s'annule aussi en $a/2$. On a $m - 1$ nœuds entre les extrémités, régulièrement espacés. On en déduit les figures demandées :



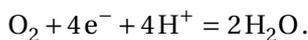
Partie III : chauffe-eau (CCINP TSI 2021)

Électrode sacrificielle de magnésium

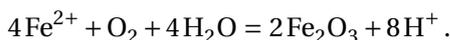
Q 1. Le fer est au degré II dans Fe^{2+} et III dans Fe_2O_3 . On en déduit l'équation électrochimique pour le couple $\text{Fe}_2\text{O}_3/\text{Fe}^{2+}$:



Pour le couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$, on a



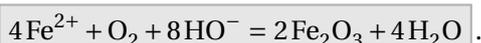
On écrit le bilan de la réaction de Fe^{2+} avec O_2 en éliminant les électrons, d'où



La réaction se déroulant en milieu alcalin ($\text{pH} > 7$), les ions HO^- sont prépondérants devant les ions H^+ . On aurait donc dû équilibrer les charges avec HO^- ; il suffit d'éliminer les ions H^+ du bilan avec



d'où



Q 2. Degré d'oxydation du magnésium dans les espèces considérées :

espèce	Mg(s)	Mg^{2+}	$\text{Mg}(\text{OH})_2(\text{s})$
n.o.(Mg)	0	+II	+II

Le plus bas degré d'oxydation correspond au domaine de plus bas potentiel, d'où la position de Mg sur le diagramme.

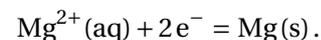
L'hydroxyde $\text{Mg}(\text{OH})_2(\text{s})$ n'existe pas si

$$[\text{Mg}^{2+}][\text{HO}^-]^2 < K_s$$

soit pour les faibles concentrations en HO^- donc les pH faibles.

Le domaine de Mg^{2+} est donc celui à pH faible (« à gauche »), tandis que celui de $\text{Mg}(\text{OH})_2$ est à pH élevé (« à droite »).

Q 3. La réaction électrochimique est



La formule de Nernst s'écrit alors

$$E = E^\circ(\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}) + 0,03 \log \frac{[\text{Mg}^{2+}]}{c^\circ}.$$

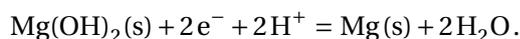
À la frontière, on a $[Mg^{2+}]_{fr} = C_t$, d'où

$$E_{fr} = E^\circ(Mg^{2+}/Mg) + 0,03 \log \frac{C_t}{c^\circ}.$$

On calcule $E_{fr} = -2,55 \text{ V}$.

Cette valeur est en accord avec le diagramme.

Q 4. L'équation électrochimique est



La formule de Nernst s'écrit alors

$$E = E^\circ(Mg(OH)_2/Mg) + 0,03 \log \frac{[H^+]^2}{(c^\circ)^2}$$

soit à la frontière

$$E_{fr} = E^\circ(Mg(OH)_2/Mg) - 0,06\text{pH}.$$

La pente de la frontière est de $-0,06 \text{ V/ph}$.

Q 5. Le domaine de l'eau est au-dessus de la droite

$$E = -0,06\text{pH}.$$

Le domaine du dioxygène est au-dessus de la droite

$$E = 1,23 - 0,06\text{pH}.$$

Ces deux domaines sont disjoints de celui du magnésium $Mg(s)$.

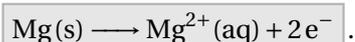
Le magnésium n'est stable ni dans l'eau ni dans le dioxygène.

Q 6. Une anode est une électrode siège d'une **oxydation**.

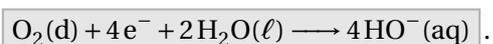
Q 7. Le magnésium se fait oxyder, passant du degré 0 dans $Mg(s)$ au degré +II dans $Mg^{2+}(aq)$.

L'électrode de magnésium est donc une **anode**.

Q 8. La demi-équation d'oxydo-réduction qui se déroule au niveau de l'anode est donc



Au niveau de la cathode se produit la réduction du dioxygène selon



Q 9. Complétons les légendes du schéma :

1	2	3	4
$O_2(d)$	$HO^-(aq)$	cathode	$Mg^{2+}(aq)$

5	6	7
anode	sens des électrons	sens du courant

Q 10. L'électrode de magnésium se fait oxyder, protégeant ainsi la cuve en acier : on parle d'électrode sacrificielle car elle se fait consommer, se « sacrifiant » pour le bien de la cuve!

Q 11. L'intensité sortant de la cuve est $I = j_e S_c$. Pendant Δt , la charge échangée est donc

$$Q = I \Delta t = j_e S_c \Delta t.$$

La quantité d'électrons échangés (en mole) est

$$n(e^-) = \frac{Q}{F} = \frac{j_e S_c \Delta t}{F}.$$

Compte tenu de la stœchiométrie de l'échange électrochimique, la quantité de magnésium consommé est

$$n(Mg) = \frac{n(e^-)}{2} = \frac{j_e S_c \Delta t}{2F}.$$

La masse de magnésium s'écrit de deux façon :

$$m(Mg) = n(Mg) M(Mg) = \rho(Mg) V$$

d'où

$$\Delta t = \frac{2F\rho(Mg)V}{j_e S_c M(Mg)}.$$

On calcule

$$\Delta t = \frac{2 \times 96500 \times 1,74 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-4}}{50 \times 10^{-3} \times 3 \times 24,2 \times 10^{-3}} = 1,8 \times 10^7 \text{ s}$$

soit $\Delta t \approx 210 \text{ jours}$.