

Partie I : À propos de la structure de la Terre (Centrale PSI 2024)

Des informations sur la structure de la Terre issues des ondes

On considère que l'intérieur de la Terre est constitué d'une succession de couches de propriétés physiques différentes, telles que représentées à la figure I-1 :

- au centre, le noyau forme 17 % du volume terrestre et se divise en :
 - la graine (ou noyau interne), essentiellement constituée de fer solide,
 - le noyau externe, essentiellement constitué de fer liquide;
- dans la partie intermédiaire, le manteau constitue 81 % du volume terrestre;
- en surface, la croûte solide représente moins de 2 % du volume terrestre.

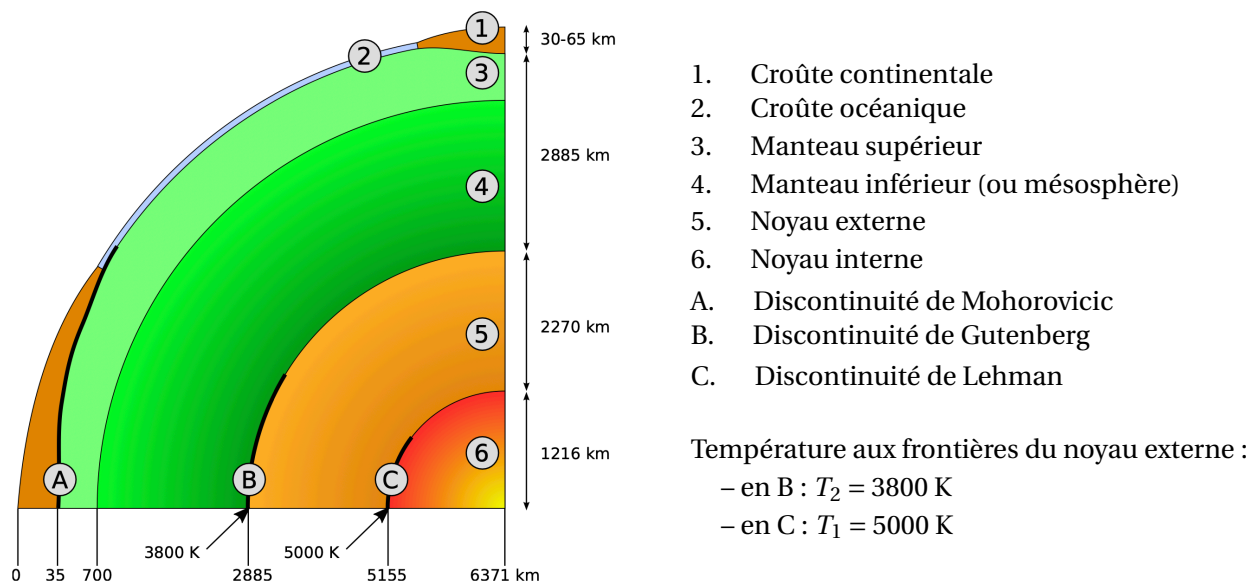


FIGURE I-1 – Structure de la Terre. D'après Wikipedia.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

On définit l'unité imaginaire i , nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Un formulaire et certaines données numériques, qui complètent celles de la figure I-1, sont disponibles en fin d'énoncé.

1 — Modèles d'ondes longitudinales et transversales

Des informations sur la structure interne de la Terre sont obtenues par l'analyse des ondes sismiques qui s'y propagent suite aux grands séismes qui ont lieu dans la croûte solide. Ces ondes sont de natures variées :

- volumique : elles peuvent alors être transversales (onde S) ou longitudinales (ondes P);
- surfaciques : elles sont les plus destructrices et ne sont pas étudiées ici.

1 Ondes longitudinales dans les fluides et solides homogènes

On considère une onde sonore se propageant de façon unidimensionnelle suivant un axe (Ox) dirigé par \vec{e}_x fixe dans un fluide homogène, de masse volumique μ_0 et de pression P_0 à l'équilibre. Les grandeurs caractéristiques du fluide ne dépendent que de la position x et du temps t . Lors du passage de cette onde, le fluide subit une petite perturbation locale.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique. La masse volumique s'écrit $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$, la pression $P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$ et la vitesse $\vec{v}(x, t) = v_1(x, t)\vec{e}_x$. Les grandeurs $\mu_1(x, t)$, $P_1(x, t)$ et $v_1(x, t)$, associées à l'onde, sont des infiniment petits du premier ordre.

L'accélération d'une particule de fluide est donnée par la dérivée particulaire $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$. Les effets de la viscosité et de la pesanteur sont négligés et le référentiel d'étude est galiléen. L'évolution du fluide est supposée isentropique et on note $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \approx \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S$ son coefficient de compressibilité isentropique, où V est le volume d'une particule de fluide.

Q 1. On rappelle que l'équation locale de conservation de la masse s'écrit $\frac{\partial\mu}{\partial t} + \text{div}(\mu\vec{v}) = 0$. En la linéarisant par rapport aux variables μ et v_1 dans le cadre de l'approximation acoustique, établir l'équation aux dérivées partielles liant les variations temporelles de $\mu_1(x, t)$ aux variations spatiales de $v_1(x, t)$.

Q 2. Écrire la projection sur \vec{e}_x du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide. Toujours dans le cadre de l'approximation acoustique, la linéariser par rapport à la vitesse et à la surpression.

Q 3. Établir une relation linéaire entre $P_1(x, t)$ et $\mu_1(x, t)$.

Q 4. En déduire l'équation aux dérivées partielles, de propagation, satisfaite par $P_1(x, t)$ et expliciter l'expression de la célérité c des ondes longitudinales de pression dans le fluide.

Q 5. Déterminer l'expression de la célérité c_1 de ces ondes dans l'air (assimilé à un gaz parfait) en fonction de sa température T_0 , de son rapport γ entre capacités thermiques à pression et volume constants, de sa masse molaire moyenne M_{air} et de la constante des gaz parfaits R .

Faire l'application numérique pour $T_0 = 293 \text{ K}$, $\gamma = 1,40$, $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q 6. Déterminer à présent la célérité c_2 de ces ondes dans l'eau liquide à 293 K avec $\chi_s = 4,90 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\mu_0 = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La théorie précédente s'étend aux ondes longitudinales dans les solides isotropes dans le cadre de l'élasticité linéaire. On considère un barreau solide cylindrique d'axe (Ox), de volume V constant, de longueur ℓ et de section Σ . On définit pour ce barreau :

— la force par unité de surface, dite contrainte mécanique interne (T_c en Pa), qui est l'analogie de $-P_1$;

— le module de Young E du matériau tel que $\frac{1}{E} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial\ell}{\partial T_c}\right)_S$.

Q 7. En déduire l'expression de la célérité c_ℓ des ondes longitudinales de compression-dilatation dans le barreau en fonction de E et de la masse volumique μ . La calculer pour le fer à 293 K et sous pression atmosphérique sachant que, dans ces conditions, $E = 196 \text{ GPa}$ et $\mu_{\text{Fe}} = 7,87 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q 8. Proposer une interprétation physique pour les différences observées entre les célérités des ondes longitudinales c_1 , c_2 et c_ℓ .

2 Ondes transversales dans un solide homogène

On étudie ici les ondes élastiques de déformation transverse se propageant suivant l'axe (Ox) d'un solide cristallin réduit à deux dimensions dans le plan (Oxz), comme représenté à la figure I-2. On considère les vibrations élastiques transversales de plans atomiques parallèles supposés identiques et de masse m . On note d la distance suivant l'axe (Ox) entre deux plans atomiques successifs. On suppose qu'au passage de l'onde transversale, chaque plan se déplace en bloc dans la direction (Oz). On note alors ξ_n l'écart du plan de rang n à sa position d'équilibre.

On admet, pour simplifier, que le plan de rang n est soumis uniquement aux forces de rappel élastique de la part de chacun de ses deux plans plus proches voisins. La force exercée par le plan de rang $n+1$ sur le plan de rang n est ainsi de la forme $\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = C(\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t))\vec{e}_z$.

Q 9. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle du déplacement du plan de rang n en fonction notamment de $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_{n+1}(t)$ et $\xi_n(t)$.

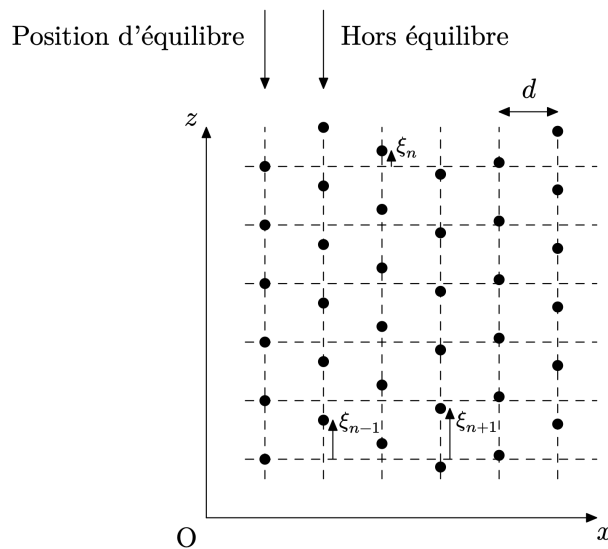


FIGURE I-2 – Représentation schématique des déplacements atomiques.

On cherche des solutions de la forme $\underline{\xi}_n = \underline{A} \exp(i(nkd - \omega t))$ en notation complexe où k est une constante réelle, ω une constante réelle strictement positive et \underline{A} une constante complexe non nulle. $\vec{k} = k \vec{e}_x$ est le vecteur d'onde et ω la pulsation temporelle.

Q 10. Obtenir la relation de dispersion entre k et ω . L'écrire sous la forme $\omega = f(k, d, \omega_0)$ avec $\omega_0 = \sqrt{C/m}$.

Q 11. Tracer l'allure de la courbe donnant ω en fonction de k pour $k \in]-\pi/d, \pi/d[$. Montrer que le cristal se comporte comme un filtre passe-bas dont on déterminera la pulsation de coupure ω_c .

Q 12. Établir les expressions littérales de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g en fonction de k , ω_0 et d pour $k \in]0, \pi/d[$.

On se place à présent dans le cadre de l'approximation des milieux continus où la longueur d'onde λ des ondes transversales est très grande devant d .

Q 13. Déduire la célérité c_t des ondes transversales dans le cadre de cette approximation en fonction de d , C et m .

La célérité c_t peut également être explicitée dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire selon la relation $c_t = \sqrt{L/\mu}$ où interviennent des grandeurs macroscopiques du solide : son module de cisaillement $L \approx 0,4E$ (en Pa) et sa masse volumique μ .

Q 14. Discuter la relation $c_t = \sqrt{L/\mu}$ compte tenu du résultat de la question précédente. Calculer c_t pour le fer à 293 K et à pression atmosphérique.

2 — Ondes P et S dans la Terre et modèle PREM

Les ondes de volume dans la Terre, modélisée comme un milieu tridimensionnel élastique linéaire, sont de deux types :

- les ondes P de compression-dilatation de nature longitudinale. Elles peuvent se propager dans les milieux solides et fluides. Leur vitesse est donnée par $v_p = \sqrt{(K + 4L/3)/\mu}$ où μ est la masse volumique et K et L sont deux coefficients positifs appelés respectivement module d'incompressibilité et module de cisaillement (exprimés en Pa). Ces trois grandeurs sont caractéristiques du milieu traversé. Le module de cisaillement est généralement considéré comme nul dans les fluides où il est négligeable devant le module d'incompressibilité ;
- les ondes S de cisaillement. Elles ne se propagent effectivement que dans les solides. Leur vitesse est donnée par $v_s = \sqrt{L/\mu}$.

L'analyse de temps de parcours des ondes P et S, enregistrées en différents points du globe après de grands séismes, a permis de calibrer un modèle radial de la Terre dit modèle PREM (*Preliminary Reference Earth Model*). Il permet notamment de préciser, en fonction de la distance au centre de la Terre, les vitesses v_p et v_s et la masse volumique μ .

Q 15. En explicitant la démarche, attribuer aux vitesses des ondes P et S les profils en tirets ou en pointillés de la figure I-3. Discuter la cohérence de cette figure avec la structure interne de la Terre décrite dans l'introduction du sujet.

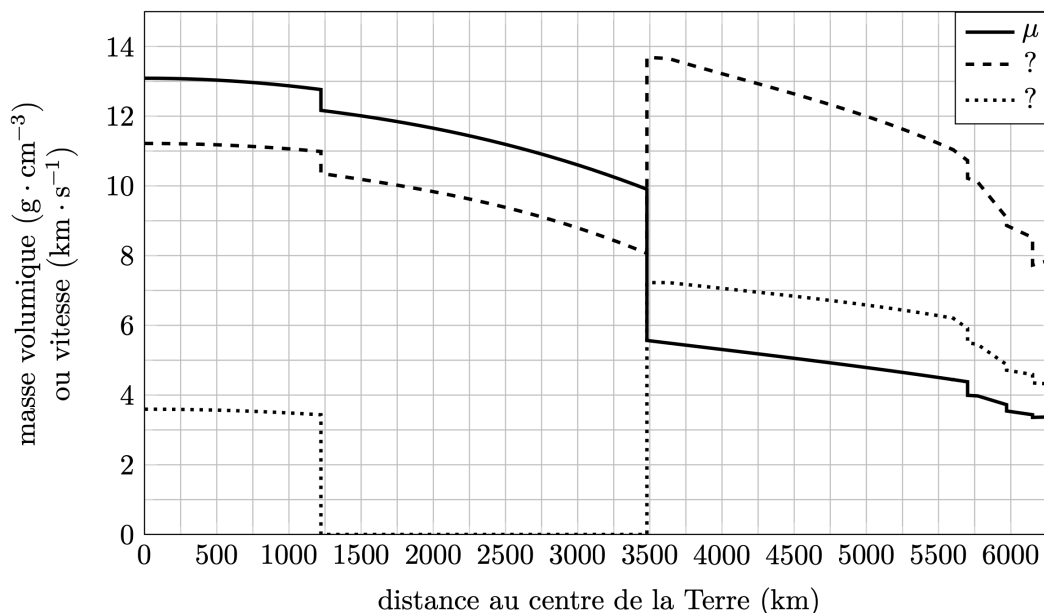


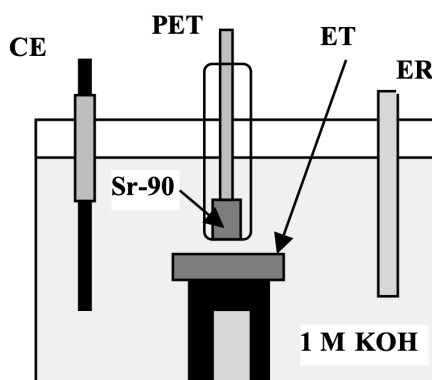
FIGURE I-3 – Profils de la masse volumique et des vitesses des ondes P et S dans le modèle PREM.
 D'après Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. *Preliminary reference Earth model*.
 Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 25, n° 4, p. 207-356.

Partie II : Une batterie nucléaire à base d'eau (Mines PSI 2021)

Des chercheurs de l'Université du Missouri ont concentré leurs recherches sur l'isotope 90 du strontium, qui permet de stimuler l'énergie électrochimique dans une solution à base d'eau. La batterie, équipée d'une électrode de dioxyde de titane nanostructuré et d'un revêtement de platine, peut ainsi recueillir et convertir efficacement l'énergie en électrons. Ces appareils sont prometteurs pour des applications spatiales, des dispositifs marins éloignés, etc.

« L'eau agit comme un tampon et la surface des plasmons créée dans le dispositif s'est avérée être très utile pour en augmenter l'efficacité », écrit Jae W. Kwon dans la recherche publiée par la revue scientifique Nature.

Réf.: 백현김, 재권, « Plasmon assisted radiolytic energy conversion in aqueous solutions », Nature 06/2014

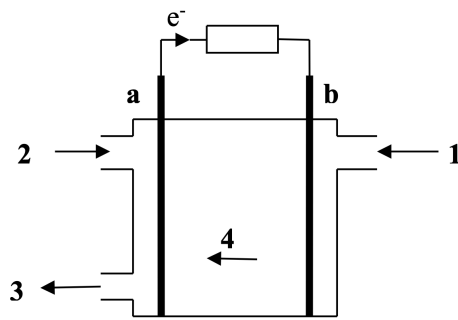


PET : polyethylene terephthalate (film plastique)

DOCUMENT 1 – Vue schématique du dispositif

Q 1. Expliquer à partir du document 1 comment tracer expérimentalement des courbes intensité-potential à la surface de l'électrode désignée par ET. Proposer une signification pour les électrodes désignées par CE et ER.

Il y a une cinquantaine d'année, les piles à combustibles alcalines (pile AFC, document 2) ont été développées pour les programmes spatiaux.



DOCUMENT 2 – Schéma de principe d'une pile AFC

Par réaction entre du dioxygène gazeux et du dihydrogène gazeux en milieu alcalin ($\text{pH} = 14$), on produit de l'eau et un courant électrique. Cette pile a un rendement de 50 %.

On suppose que $P(\text{O}_2) = P(\text{H}_2) = 1 \text{ bar}$ et que la pile est utilisée à une température de $25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Q 2. Déterminer les réactions à l'anode et à la cathode ainsi que l'équation globale de fonctionnement de la pile.

Q 3. Nommer les espèces chimiques **1** à **4** et affecter les termes d'anode et de cathode aux électrodes **a** et **b** du document 2.

Q 4. Calculer les potentiels à $\text{pH} = 14$ de chacun des électrodes. Quelle est la valeur de la force électromotrice théorique de la pile? Pourquoi est-elle en réalité plus faible?

Q 5. Donner l'allure des courbes intensité-potential décrivant cette pile, en précisant les valeurs des potentiels caractéristiques.

Q 6. Quelle est la valeur de la tension à vide? Commentez.

Q 7. Une pile lithium-ion utilisée dans un pacemaker délivre un courant d'environ $20 \mu\text{A}$ et peut fonctionner 8 ans. Quel serait le volume de dioxygène nécessaire pour faire fonctionner la pile à combustible dans les mêmes conditions?

Données à 298 K

Constante de gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante de Faraday : $F = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

Volume molaire des gaz : $V_m = 25 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$

Numéro atomique : C : 6; O : 8; Ca : 20; Y : 39.

Constante de Nernst : $\frac{RT}{F} \ln 10 \approx 0,06 \text{ V}$

$P^\circ = 1,00 \text{ bar} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$

Potentiels standard à $\text{pH} = 0$:

$E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)) = 1,23 \text{ V}$; $E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2(\text{g})) = 0,00 \text{ V}$

Surtensions sur électrode de platine pour les couples de l'eau (en valeur absolue):

$\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)$: $0,5 \text{ V}$; $\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})$: $0,1 \text{ V}$.

Partie III : vibrations musicales (Centrale PC 2010)

Ce problème aborde les vibrations mécaniques sources de l'émission sonore des claviers à percussion.

Dans tout le problème, on néglige l'influence des forces de pesanteur.

Données et notations :

Masse volumique de l'air	$\rho_a = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Vitesse du son dans l'air	$c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique de l'eau	$\eta_e = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'acier	$\rho = 7,80 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young de l'acier	$E = 19,5 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Masse volumique du bronze	$\rho = 8,70 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young du bronze	$E = 1,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Masse volumique du bois de palissandre	$\rho = 740 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young du bois de palissandre	$E = 1,2 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Nous étudions certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elle produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

1 — Vibrations transversales d'une lame

En considérant les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L (figure III-1), a matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x, t)$ et est soumise, de la part de la matière située à droite, à une force $\vec{F} = F(x, t) \vec{u}_x$. On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta \ell$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES \frac{\delta \ell}{\ell_0}$.

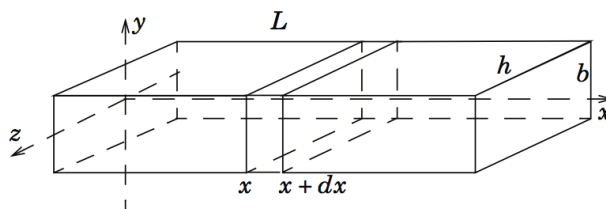


FIGURE III-1 – Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

Dans les questions qui suivent, on analyse les petits mouvements transversaux de la lame (partie gauche de la figure III-2). Les points situés au repos dans le plan médian de la lame, à l'abscisse x et à l'ordonnée $y = 0$, se trouvent à l'instant t du mouvement, à l'ordonnée $y(x, t)$. Dans le plan (Oxy) , ils sont alors représentés par une courbe formant avec l'horizontale un angle local $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ et de courbure $C(x, t) \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

On rappelle que $C = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dL}$, où R désigne le rayon de courbure et dL la longueur infinitésimale d'un élément de courbe.

Pour établir l'équation du mouvement, on adopte une double décomposition en éléments infinitésimaux (partie droite de la figure 2). D'une part, on analyse le mouvement et les déformations d'une portion de lame occupant les abscisses $[x, x + dx]$ et dont les faces forment entre elles l'angle $d\alpha$. D'autre part, cet élément peut être considéré comme un assemblage de couches d'ordonnées $y(x, t) + u$ et d'épaisseur du , avec $u \in [-b/2, b/2]$.

Q 1. En flexion, certaines couches se trouvent étirées et d'autres comprimées. On admet que le couche repérée par $u = 0$ conserve au cours du mouvement une longueur dx inchangée alors que les autres voient leur longueur passer de dx au repos à $dL' \neq dx$. Exprimer $\frac{dL' - dx}{dx}$ en fonction de u et C .

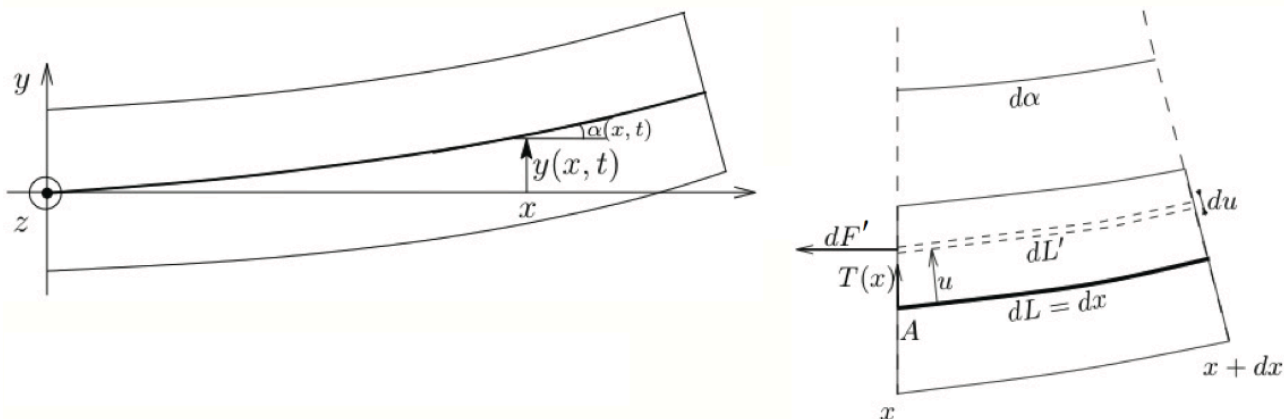


FIGURE III-2 – Mouvements transversaux d'une lame

Q 2. Quelle est l'aire dS de la section transversale de la couche d'épaisseur du ? En déduire la force dF que cette couche étirée subit, puis celle dF' qu'elle exerce réciproquement sur la matière située à gauche.

Q 3. Vérifier la nullité de la résultante de ces forces sur la section entière de la lame.

Q 4. Calculer le moment $M(x)$ part rapport à l'axe (A, \vec{u}_z) des forces exercées par le tronçon de longueur dx sur la matière située à sa gauche, où A désigne le point d'abscisse x tel que $u = 0$.

Q 5. Au travers d'une section de la lame s'exercent aussi des efforts transversaux : la partie de lame occupant les abscisses supérieures à x exerce sur celle se trouvant à sa gauche des efforts de résultante $\vec{T} \approx T(x, t) \vec{u}_y$. En admettant la relation

$$\frac{\partial M}{\partial x} \approx -T(x, t),$$

en déduire l'équation des mouvements transversaux sous la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Q 6. On envisage maintenant des solutions telles que $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$. Préciser l'équation différentielle dont $f(x)$ est solution.

Q 7. La fonction f s'exprime à l'aide de quatre constantes A, B, C et D sous la forme

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \cosh(kx) + D \sinh(kx).$$

Donner, en la justifiant, la relation entre ω et k .

Q 8. Dans cette question, les deux extrémités de la barre, d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, sont liées à des supports fixes par des charnières assurant des liaisons de type pivot parfait d'axes parallèles à \vec{u}_z . En déduire en fonction d'un entier n les valeurs k_n permises pour k puis les fréquences propres f_n .

Q 9. Pour vibrer correctement, les lames des instruments de percussion reposent sans fixation rigide sur un support. Leurs extrémités ne sont donc soumises à aucune contrainte assujettissant leur position. Exprimer ces conditions en faisant intervenir deux des quatre grandeurs T, M, y et α introduites plus haut. En déduire quatre équations portant sur A, B, C et D . Leur résolution, non demandée, conduit aux fréquences propres

$$f_n = \frac{\pi b}{16\sqrt{3}L^2} c_\ell u_n^2 \quad \text{avec} \quad u_1 = 3,01; \quad u_2 = 5,00; \quad u_n \approx 2n + 1.$$

Q 10. Expérimentalement, on a mesuré $f_2/f_1 = 2,71$, $f_3/f_1 = 5,15$, $f_4/f_1 = 8,43$ pour une lame de glockenspiel. Commenter ces valeurs. Calculer numériquement f_1 pour une lame d'épaisseur $b = 9,15$ mm et de longueur $L = 24,3$ cm correspondant à la note la plus grave de l'instrument.

Q 11. Les lames d'un marimba basse sont constituées de bois de palissandre d'épaisseur $b = 2,31$ cm. Quelle valeur faut-il donner à L pour atteindre $f_1 = 65$ Hz?

Q 12. Pour accorder un marimba, on entaille la partie inférieures de la lame de manière à lui donner la forme d'une voûte (figure 3). Qualitativement, cela a-t-il pour effet d'augmenter ou de diminuer la valeur L nécessaire pour obtenir une fréquence donnée? Le facteur de l'instrument ajuste aussi cette voûte de manière à obtenir $f_2/f_1 \approx 4$, ce qui produit un son plus harmonieux. Pourquoi ce second point est-il inutile sur un glockenspiel?

2 — Accord des résonateurs

Pour améliorer le rayonnement du son par le marimba, on place sous chaque lame un tube résonateur (figure 3). Ce tube cylindrique creux de diamètre D , d'axe (Oy) , présente une extrémité ouverte au voisinage de la lame (en $y = 0$) alors que l'autre, en $y = -H$, est rigidement fermée. On note en représentation complexe $p(y = 0, t) = p_0 e^{j\omega t}$ la pression de l'onde acoustique produite en $y = 0$ par la vibration de la lame.

On recherche la pression acoustique dans le tuyau sous la forme

$$p(y, t) = A e^{j(\omega t - ky)} + B e^{j(\omega t + ky)}.$$

Q 13. Rappeler sans démonstration la relation de dispersion des ondes acoustiques dans l'air.

Q 14. Écrire, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation d'Euler reliant le champ des vitesses au gradient de pression.

Q 15. En déduire l'expression de la vitesse acoustique $v(y, t)$ en fonction des données de l'énoncé.

Q 16. Exprimer les constantes A et B en fonction des données du problème.

Q 17. Quelle est la plus petite valeur de H correspondant à une résonance du tuyau pour une fréquence f donnée?

Faire l'application numérique pour $f = f_1 = 65$ Hz. Y-a-t-il résonance de l'harmonique de rang 2 accordée sur $f_2 \approx 4f_1$?

Q 18. Sur les marimbas de concert, la valeur de H peut être modifiée en déplaçant un bouchon rigide à l'intérieur du tube résonateur. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif?

3 — Vibration d'une cymbale

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan (Oxz) .

Dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle établie pour les vibrations transversales d'une lame :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\rho^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} \right) = 0 \quad \text{avec } \sigma = 0,34.$$

Q 19. On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type

$$y(x, z, t) = y_0 \exp \left\{ i[\omega t - \vec{k} \cdot (x \vec{u}_x + z \vec{u}_z)] \right\}.$$

Établir la relation entre ω et $k = |\vec{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ .

Q 20. Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de la longueur d'onde λ . La propagation est-elle dispersive?

Q 21. La figure III-4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instants suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente? Expliquer.

Q 22. On a signalé sur la figure III-4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6$ mm et $\lambda_2 = 12$ mm. En exploitant les images, déterminer $v_\varphi(\lambda_1)$ et $v_\varphi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique de l'avant dernière question. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b .

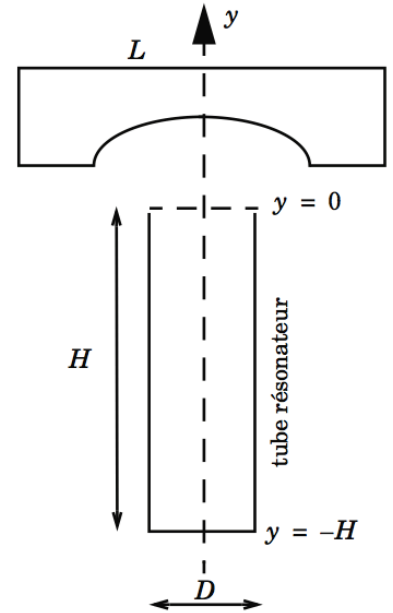


FIGURE III-3 – lame de marimba présentant une voûte et munie d'un tube résonateur

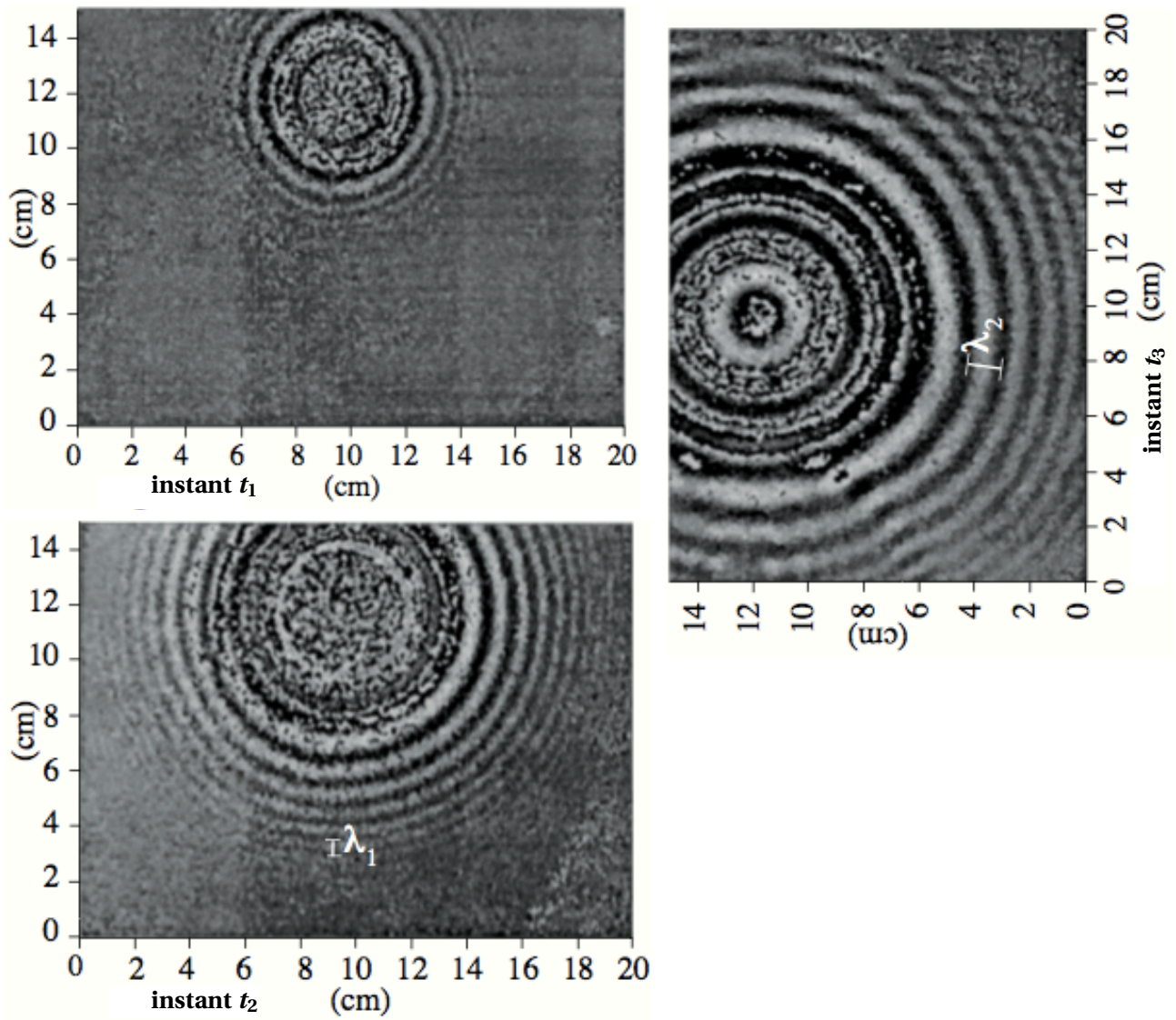


FIGURE III-4 – État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :
 $t_1 = 30 \mu\text{s}$, $t_2 = 60 \mu\text{s}$, $t_3 = 120 \mu\text{s}$