DS n° 6 — Sujet « difficile » Solution

Partie I : À propos de la structure de la Terre (Centrale PSI 2024)

Des information sur la structure de la Terre issues des ondes

1 — Modèles d'ondes longitudinales et transversales

1 Ondes longitudinales dans les fluides et solides homogènes

Q 1. L'équation locale de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial(\mu_0+\mu_1(x,t))}{\partial t}+\mathrm{div}[(\mu_0+\mu_1(x,t))v_1(x,t)]=0\,.$$

En écartant le terme $\mu_1 v_1$ d'ordre 2, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial\mu_1(x,t)}{\partial t}+\mu_0\,\mathrm{div}(v_1(x,t))=0}\,.$$

Q 2. La projection sur $\vec{e}_x$ du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide s'écrit

$$(\mu_0+\mu_1(x,t))\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\frac{\partial(P_0+P_1(x,t))}{\partial x}\,.$$

La linéarisation conduit à

$$\boxed{\mu_0\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x}}\,.$$

Q 3. Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par

$$\chi_S=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S\,.$$

Démonstration simplifiée

L'évolution des particules de fluide étant isentropique, on peut écrire

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S=\frac{\mu-\mu_0}{P-P_0}=\frac{\mu_1}{P_1}=\mu\chi_S=(\mu_0+\mu_1(x,t))\chi_S$$

soit

$$\mu_1=(\mu_0+\mu_1(x,t))P_1(x,t)\chi_S$$

qui se linéarise en

$$\boxed{\mu_1(x,t)=\mu_0\chi_S P_1(x,t)}\,.$$

Démonstration plus précise

Au voisinage de P_0, on peut écrire au premier ordre.

$$\mu(P)=\mu(P_0+P_1(x,t))=\mu_0+P_1\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S$$

Comme $\mu=\mu_0+\mu_1$ où $\mu_0=\mu(P_0)$ en l'absence d'onde, on obtient

$$\mu_1(x,t)=P_1\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S=\mu P_1\chi_S=(\mu_0+\mu_1(x,t))P_0\chi_S\,.$$

On retrouve ensuite le résultat précédent par linéarisation.

Q 4. Avec $\vec{v}_1=v_1(x,t)\vec{e}_x$, on a

$$\mathrm{div}\,\vec{v}_1=\frac{\partial v_1}{\partial x}\,.$$

Des questions **Q1** et **Q3** on obtient

$$\mu_0\chi_S\frac{\partial P_1}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x}\,.$$

d'où

$$\mu_0\chi_S\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}$$

les variables x et t étant indépendantes (Schwarz).
À l'aide de la question **Q2**, on a alors

$$\mu_0\chi_S\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\,.$$

On obtient l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial x^2}=0}\quad\text{avec}\quad\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}}\,.$$

Q 5. L'air étant un gaz parfait, il suit la loi de Laplace pour une évolution isentropique, soit

$$P\mu^{-\gamma}=\mathrm{cte}\,.$$

La différentielle logarithmique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}-\gamma\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=0\,.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}=\gamma\dfrac{P}{\mu}$ pour cette évolution à S constant, d'où

$$\chi_S=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S=\frac{1}{\gamma P}\,.$$

À l'ordre de plus bas non nul, on a $\chi_S=\dfrac{1}{\gamma P_0}$, d'où

$$c=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}\,.$$

L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit

$$P_0\frac{M_{\mathrm{air}}}{\mu_0}=RT_0$$

d'où

$$\boxed{c_1 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_{\text{air}}}}}\,.$$

On calcule

$$c_1 = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}31 \times 293}{29 \times 10^{-3}}}$$

soit $\boxed{c = 342\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Q 6. Pour l'eau liquide, on calcule

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10^3 \times 4{,}9 \times 10^{-10}}}$$

soit $\boxed{c_2 = 1430\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Q 7. Il s'agit d'utiliser l'analogie entre les deux expressions

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \quad \text{et} \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial \ell}{\partial T_c}\right)_S = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T_c}\right)_S$$

comme $V = \ell\Sigma$ avec Σ constante.

Le module de Young E est donc analogue à $1/\chi_S$, ce qui permet d'écrire

$$\boxed{c_\ell = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}}}\,.$$

On calcule

$$c_\ell = \sqrt{\frac{196 \times 10^9}{7{,}87 \times 10^3}}$$

soit $\boxed{c_\ell = 4490\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Q 8. La célérité est d'autant plus élevée que le milieu est dense (μ_0 faible) et rigide (E élevé) ou peu compressible (χ_S faible).

On a donc

$$c_{\text{gaz}} < c_{\text{liquide}} < c_{\text{solide}}\,.$$

- ➤ Dans un milieu dense, les molécules/atomes interagissent plus efficacement entre voisins ce qui permet transmission de l'onde sonore plus rapide.
- ➤ Dans un milieu plus rigide, les forces entre molécules/atomes voisins sont plus intense, ce qui permet transmission de l'onde sonore plus rapide.

2 Ondes transversales dans un solide homogène

Q 9. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au plan de rang n s'écrit, en projection selon Oz

$$m\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = F_{n+1\to n} + F_{n-1\to n} = C\,(\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)) + C\,(\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t))$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2} = \frac{C}{m}\,(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t))}\,.$$

Q 10. Écrivons que $\underline{\xi}_n = \underline{A}\exp(\mathrm{i}(nkd - \omega t))$ vérifie l'équation différentielle précédente; on obtient après simplification

$$-\omega^2 = \frac{C}{m}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd} - 2\right) = -2\frac{C}{m}(1 - \cos(kd))\,,$$

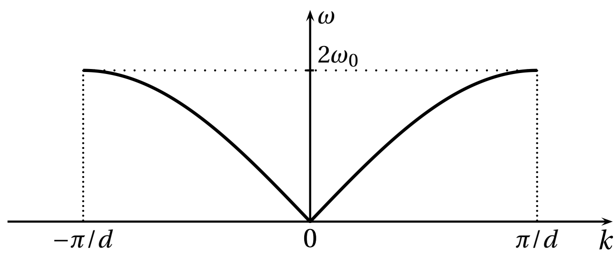
soit

$$\omega^2 = \frac{4C}{m}\sin^2\left(\frac{kd}{2}\right).$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{C/m}$, on obtient

$$\boxed{\omega = 2\omega_0\left|\sin\left(\frac{kd}{2}\right)\right|}\,.$$

Q 11. Graphe de $\omega(k)$:



On ne peut avoir solution k à la relation de dispersion que pour $\omega \leqslant 2\omega_0$, comme $|\sin(kd/2)| \leqslant 1$.

Le cristal se compote donc comme un **filtre passe-bas** de pulsation de coupure $\boxed{\omega_c = 2\omega_0}$.

Q 12. Pour $k \in]0, \pi/d[$, on a

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kd}{2}\right).$$

La vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ s'écrit alors

$$\boxed{v_\varphi = \frac{2\omega_0}{k}\sin\left(\frac{kd}{2}\right)}\,.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 2\omega_0\frac{d}{2}\cos\left(\frac{kd}{2}\right).$$

La vitesse de groupe $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ s'écrit alors

$$\boxed{v_g = \omega_0 d\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}\,.$$

Q 13. La limite $\lambda \gg d$, comme $\lambda = 2\pi/k$, revient à considérer $kd \ll 1$.

On a alors

$$\sin\left(\frac{kd}{2}\right) \approx \frac{kd}{2}.$$

On a alors

$$v_\varphi = \frac{2\omega_0}{k}\frac{kd}{2} = \omega_0 d = v_g$$

qui s'identifie à la célérité des ondes, d'où

$$\boxed{c_t = d\sqrt{\frac{C}{m}}}\,.$$

Q 14. Le résultat précédent s'écrit

$$c_t = \sqrt{\frac{d^2 C}{m}}.$$

On considérant un réseau cubique simple de paramètre de maille d, la masse volumique s'écrit $\mu = m/d^3$, d'où

$$c_t = \sqrt{\frac{C}{\mu d}}.$$

On peut faire l'analogie avec la formule proposée en posant $L = \dfrac{C}{d}$.

La constante C étant une force linéique (raideur d'un ressort), la grandeur L est bien une force surfacique, homogène à un module de Young.

Pour le fer, on calcule

$$c_t = \sqrt{\frac{0{,}4 \times 196 \times 10^9}{7{,}87 \times 10^3}}$$

soit $\boxed{c_t = 3160\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

2 — Ondes P et S dans la Terre et modèle PREM

Q 15. La courbe en pointillés indique une absence de propagation dans la zone de 1200 km à 3500 km ; c'est compatible avec :

— les ondes S qui ne se propagent pas dans les fluides ;

— la structure du noyau externe liquide proposée dans l'introduction, dans ce domaine de profondeur.

La courbe en tirets correspond donc aux ondes P.

On lit alors sur les courbes que $v_p > v_s$, ce qui est en accord avec les formules données

$$v_s = \sqrt{\frac{L}{\mu}} \quad \text{et} \quad v_p = \sqrt{\frac{L}{\mu} + \frac{K + L/3}{\mu}} > v_s\,.$$

Le noyau est bien plus dense que le manteau ; la masse volumique μ diminue donc quand on passe du noyau au manteau, ce qui entraîne une augmentation de la célérité des deux types d'ondes. On observe bien ce saut à 3500 km du centre de la Terre.

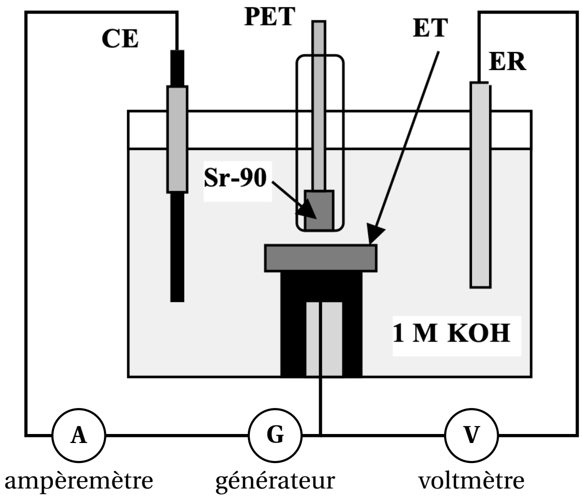
Partie II : Une batterie nucléaire à base d'eau (Mines PSI 2021)

Q 1. CE signifie **contre-électrode**.

ER signifie **électrode de référence**.

Un générateur permet d'imposer un potentiel réglable à l'électrode de travail ET. On ferme le circuit en la reliant à la contre-électrode CE, un ampèremètre permettant de mesurer l'intensité du courant traversant ET.

Un voltmètre permet de mesurer le potentiel de l'électrode ET par rapport à l'électrode de référence ER.



Q 2. À la cathode, on observe la réduction du dioxygène O_2 en H_2O.

L'oxygène passant du degré II au degré 0, l'échange électronique est $O_2 + 4\,e^- \longrightarrow 2\,H_2O$.

En milieu alcalin (basique), on équilibre les charges avec HO^- :

$$O_2 + 4\,e^- \longrightarrow 2\,H_2O + 4\,HO^-\,.$$

On équilibre ensuite la matière avec le solvant :

$$O_2 + 4\,H_2O + 4\,e^- \longrightarrow 2\,H_2O + 4\,HO^-\,.$$

Après simplification, on en déduit la réaction à la **cathode** :

$$\boxed{O_2 + 2\,H_2O + 4\,e^- \longrightarrow 4\,HO^-}\,.$$

À l'anode, on observe l'oxydation de H_2 en H_2O.

L'hydrogène passant du degré 0 au degré I, l'échange électronique est

$$H_2 \longrightarrow H_2O + 2\,e^-\,.$$

On équilibre les charges avec HO^- en milieu alcalin :

$$H_2 + 2\,HO^- \longrightarrow H_2O + 2\,e^-\,.$$

On équilibre ensuite la matière avec le solvant. On obtient la réaction à l'**anode** :

$$\boxed{H_2 + 2\,HO^- \longrightarrow 2\,H_2O + 2\,e^-}\,.$$

On obtient la réaction globale de fonctionnement de la pile en éliminant les électrons :

$$\boxed{O_2 + 2\,H_2 \longrightarrow 2\,H_2O}\,.$$

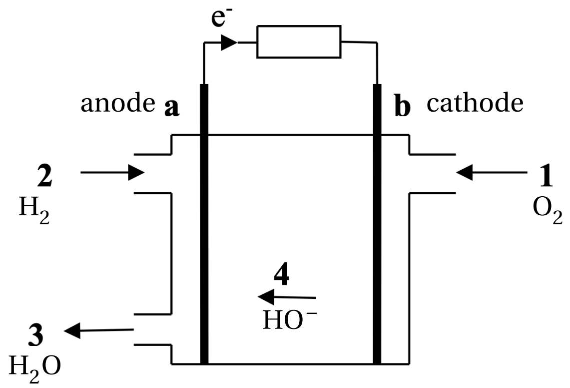
Q 3. L'électrode **a** est l'anode, car il s'y produit une oxydation libérant des électrons qui circulent dans le circuit. L'électrode **b** est la cathode.

Le réactif **2** alimentant l'anode est H_2.

Le réactif **1** alimentant la cathode est O_2.

L'eau produit est évacuée en **3**.

L'espèce **4** est HO^-, produit à la cathode et consommé à l'anode.



Q 4. À l'anode, le potentiel est donné par

$$E_a = E^\circ(H_2/H_2O) - 0{,}06\mathrm{pH} = 0 - 0{,}06 \times 14$$

soit

$$\boxed{E_a = -0{,}84\ \mathrm{V}}.$$

À la cathode, le potentiel est donné par

$$E_c = E^\circ(O_2/H_2O) - 0{,}06\mathrm{pH} = 1{,}23 - 0{,}06 \times 14$$

soit

$$\boxed{E_c = 0{,}39\ \mathrm{V}}.$$

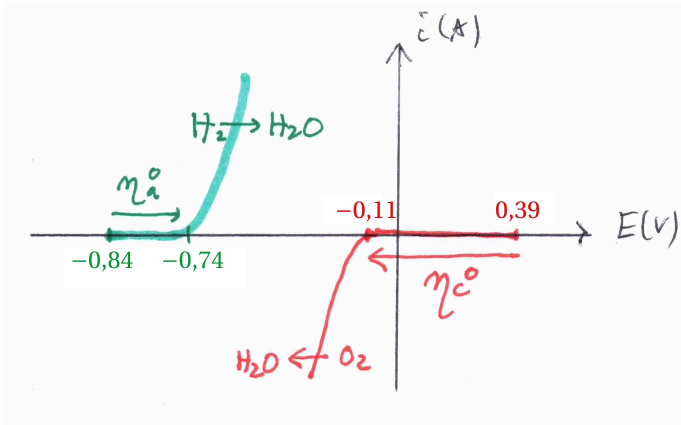
La f.é.m. théorique de la pile est $e_{th} = E_c - E_a$, soit

$$\boxed{e_{th} = 1{,}23\ \mathrm{V}}.$$

Elle est plus faible en réalité à cause des surpotentiels (cinétique aux électrodes).

Q 5. Le couple O_2/H_2O présente une surtension $\eta_c^\circ = -0{,}5$ V. La courbe « décolle » donc à partir du potentiel $0{,}39 - 0{,}5 = -0{,}1$ V.

Le couple H_2/H_2O présente une surtension $\eta_a^\circ = 0{,}1$ V. La courbe « décolle » donc à partir du potentiel $-0{,}84 + 0{,}1 = -0{,}74$ V.



Q 6. La tension à vide vaut alors

$$U = (0{,}39 - (0{,}5)) - (-0{,}84 - (-0{,}1)) = -0{,}11 + 0{,}74$$

soit $\boxed{U = 0{,}63\ \mathrm{V}}$.

Les surpotentiels réduisent de moitié la tension à vide par rapport à la f.é.m. théorique.

Q 7. La charge totale débitée pendant la durée de fonctionnement de la pile est

$$Q = 20 \times 10^{-6} \times 8 \times (365 \times 24 \times 3600) = 5{,}0 \times 10^3\ \mathrm{C}.$$

La quantité d'électrons échangés (en mole) est

$$n(e^-) = \frac{Q}{F}.$$

Le rendement de la pile étant de 50 %, seuls la moitié des électrons échangés participe à la réaction de fonctionnement de la pile, soit

$$n(e^-)_{\text{utile}} = \frac{n(e^-)}{2} = \frac{Q}{2F}$$

Compte tenu de la stœchiométrie de la réaction de fonctionnement, la quantité de dioxygène consommée est

$$n(O_2) = \frac{n(e^-)_{\text{utile}}}{4} = \frac{Q}{8F}.$$

Le volume correspondant est

$$V(O_2) = n(O_2)V_m = \frac{QV_m}{8F}.$$

On calcule $\boxed{V(O_2) = 0{,}16\ \mathrm{L}}$.

Partie III : vibrations musicales (Centrale PC 2010)

1 — Vibrations transversales d'une lame

Q 1. La couche de rayon R a pour longueur $\mathrm{d}L = \mathrm{d}x$; celle de rayon $R-u$ a pour longueur $\mathrm{d}L'$. On a donc

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{R} = \frac{\mathrm{d}L'}{R-u}$$

d'où

$$\mathrm{d}L' = \left(1 - \frac{u}{R}\right)\mathrm{d}x$$

et

$$\mathrm{d}L' - \mathrm{d}x = -\frac{u}{R}\,\mathrm{d}x = -Cu\,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = -Cu}.$$

Q 2. La section transversale de la couche d'épaisseur $\mathrm{d}u$ a pour aire $\boxed{\mathrm{d}S = h\,\mathrm{d}u}$.
Elle subit la force

$$\mathrm{d}F = E\,\mathrm{d}S\frac{\mathrm{d}L' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x},$$

soit

$$\boxed{\mathrm{d}F = -EhCu\,\mathrm{d}u}.$$

Elle exerce la même force sur la partie située à sa gauche : $\mathrm{d}F' = \mathrm{d}F$, soit

$$\boxed{\mathrm{d}F' = -EhCu\,\mathrm{d}u}.$$

Q 3. La résultante de la force subie par une section de la lame est

$$F = -EhC\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u\,\mathrm{d}u = -EhC\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0.$$

On a bien $\boxed{F = 0}$.

Q 4. Le moment élémentaire qui s'exerce sur la couche d'épaisseur $\mathrm{d}u$ vaut

$$\mathrm{d}\vec{M} = \vec{AP} \wedge \mathrm{d}F\,\vec{u}_x = u\,\vec{u}_y \wedge \mathrm{d}F\,\vec{u}_x = -u\,\mathrm{d}F\,\vec{u}_z.$$

En projection selon $\vec{u}_z$, le moment qui s'exerce sur toute la section vaut

$$M(x) = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} EhCu^2\,\mathrm{d}u = 2EhC\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{2}} = \frac{2EhC}{3}\frac{b^3}{8}$$

d'où

$$\boxed{M(x,t) = \frac{EhCb^3}{12}}.$$

Q 5. L'effort transversal est donné par

$$T(x,t) = -\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{EhCb^3}{12}\frac{\partial C}{\partial x},$$

avec

$$C = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

d'où

$$T(x,t) = -\frac{Ehb^3}{12}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la tranche étudiée, en projection selon $\vec{u}_y$:

$$\rho h b\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+\mathrm{d}x,t) - T(x,t) = \frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x$$

soit

$$\rho h b\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{Ehb^3}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{Eb^2}{12\rho}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0}.$$

Q 6. En cherchant une solution de la forme $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$, on obtient

$$\boxed{-\omega^2 f(x) + \frac{c_\ell^2 b^2}{12}\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} = 0}.$$

Q 7. Avec l'expression proposée, on a

$$\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} = k^4 f(x)$$

et la relation précédente conduit à

$$\boxed{\omega^2 = \frac{c_\ell^2 b^2}{12}k^4}. \qquad (1)$$

Q 8. L'extrémité en $x = 0$ étant fixe, on doit avoir $y(0,t) = 0$, doit

$$f(0) = A + C = 0. \qquad (2)$$

La liaison pivot étant parfaite en $x = 0$, on a $M(0,t) = 0$. Comme

$$M(x,t) = \frac{EhC(x,t)b^3}{12} = \frac{Ehb^3}{12}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

la condition d'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = 0,$$

soit $f''(0) = 0$.
On a

$$f''(x) = -k^2 A\cos(kx) - k^2 B\sin(kx) + k^2 C\cosh(kx) + k^2 D\sinh(kx) \qquad (3)$$

et la condition s'écrit

$$A - C = 0. \qquad (4)$$

Des équations (2) et (4) on déduit $A = C = 0$, et

$$f(x) = B\sin(kx) + D\sinh(kx).$$

On a des conditions de la même nature à l'extrémité $x = L$, ce qui se traduit par

$$f(L) = 0 \quad \text{et} \quad f''(L) = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} B\sin(kL) + D\sinh(kL) &= 0 \\ -B\sin(kL) + D\sinh(kL) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc d'une part $D\sinh(kL) = 0$, d'où $D = 0$ et $f(x) = B\sin(kx)$.

La relation $B\sin(kL) = 0$ entraîne soit $B = 0$ ce qui est impossible car on aurait $f(x) = 0$, soit $\sin(kL) = 0$, ce qui implique l'existence de modes propres $k_n L = n\pi$. On a donc

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}.$$

La relation (1) s'écrit alors

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{c_\ell b}{2\sqrt{3}} \frac{\pi^2}{L^2} n^2$$

d'où les fréquences propres

$$\boxed{f_n = \frac{c_\ell b\pi}{4\sqrt{3}L^2} n^2}.$$

Q 9. Les extrémités n'étant soumises à aucune contrainte, on a d'une part

$$T(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad T(L,t) = 0$$

et d'autre part

$$M(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad M(L,t) = 0.$$

Comme

$$M(x,t) = \frac{Ehb^3}{12} C = \frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

et

$$T(x,t) = -\frac{Ehb^3}{12} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

les conditions aux limites s'écrivent

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,y) = 0,$$

soit

$$f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(L) = 0,$$

ainsi que

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,y) = 0,$$

soit

$$f'''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'''(L) = 0.$$

Avec (3) on calcule

$$\begin{aligned} f'''(x) = k^3 A\sin(kx) - k^3 B\cos(kx) + k^3 C\sinh(kx) \\ + k^3 D\cos(kx). \end{aligned}$$

Après simplifications, les 4 conditions précédentes conduisent à

$$\begin{aligned} -A + C &= 0 \\ -A\cos(kL) - B\sin(kL) + C\cosh(kL) + D\sinh(kL) &= 0 \\ -B + D &= 0 \\ A\sin(kL) - B\cos(kL) + C\sinh(kL) + D\cosh(kL) &= 0 \end{aligned}$$

Q 10. La formule théorique conduit à

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{u_2^2}{u_1^2} = 2{,}76\,; \quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{u_3^2}{u_1^2} = 5{,}41$$

et

$$\frac{f_4}{f_1} = \frac{u_4^2}{u_1^2} = 8{,}94.$$

Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les valeurs expérimentales.

Les fréquences des modes propres $n > 1$ ne sont pas des multiples de la fréquence de mode fondamental; la hauteur du son perçu est moins nette que lorsque le spectre est harmonique (fréquences des harmoniques multiples de celle du fondamental), ce qui justifie la taille de la barre expliquée aux questions suivantes.

On calcule $f_1 = \frac{\pi \times 9{,}15 \times 10^{-3}}{16\sqrt{3}(0{,}243)^2} \times 5000(3{,}01)^2$, soit

$$\boxed{f_1 = 795\,\text{Hz}}.$$

Q 11. On calcule $L = \sqrt{\frac{\pi \times 2{,}31 \times 10^{-2}}{16\sqrt{3} \times 65} \sqrt{\frac{1{,}2 \times 10^{10}}{740}} (3{,}01)^2}$, d'où

$$\boxed{L = 1{,}21\text{ m}}.$$

Q 12. On a $f_1 \propto \dfrac{b}{L^2}$. Pour une fréquence f_1 donnée, une diminution de b doit être accompagnée d'une diminution de L.

La fréquence du mode fondamental de la lame de glockenspiel est nettement plus élevée que celle du marimba : $f_1 = 795$ Hz. On aurait alors $f_2 \approx 4 f_1 = 3{,}2$ kHz, qui représente un son bien plus aigu (moins bien perçu que dans le cas du marimba).

De plus — mais ce n'étais pas dit dans l'énoncé — les harmoniques du glockenspiel s'estompent rapidement; il n'est donc pas nécessaire de chercher à modifier la fréquence des modes non fondamentaux du glockenspiel.

2 — Accord des résonateurs

Q 13. La surpression vérifie l'équation de d'Alembert. On en déduit directement, avec la forme proposée (somme de deux ondes progressives harmoniques de même pulsation) le relation de dispersion

$$\boxed{\omega = kc}.$$

Q 14. Dans l'air, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation d'Euler s'écrit

$$\boxed{\rho_\mathrm{a}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p}.$$

Q 15. En régime harmonique, l'équation d'Euler s'écrit

$$\mathrm{i}\omega\rho_\mathrm{a}\,\vec{v} = -\left[-\mathrm{j}kA\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - lky)} + \mathrm{j}kB\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + ky)}\right]\vec{u}_y,$$

d'où comme $\omega = kc$:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{\rho_\mathrm{a} c}\left[A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - ky)} - B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + ky)}\right]\vec{u}_y}.$$

Q 16. La condition sur la pression à l'extrémité ouverte en $x = 0$ s'écrit

$$A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

soit $A + B = p_0$.
L'extrémité $y = -H$ étant rigidement fermée, on a $\vec{v}(-H, t) = \vec{0}$, soit

$$A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kH} - B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kH} = 0.$$

On en déduit $B = A\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}kH}$, d'où

$$A = \frac{p_0}{1 + e^{2\mathrm{j}kH}} = \frac{p_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kH}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kH} + e^{-\mathrm{j}kH}}$$

soit

$$\boxed{A = \frac{p_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kH}}{2\cos(kH)}}.$$

On a alors

$$B = \frac{p_0 e^{2\mathrm{j}kH}}{1 + e^{2\mathrm{j}kH}} = \frac{p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kH}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kH} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kH}}$$

soit

$$\boxed{B = \frac{p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kH}}{2\cos(kH)}}.$$

La pression s'écrit alors

$$\begin{aligned} p(y,t) &= \frac{p_0}{2\cos(kH)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(y+H)]} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t + k(y+H)]}\right] \\ &= \frac{p_0}{2\cos(kH)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(y+H)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(y+H)}\right] \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{p(y,t) = p_0\frac{\cos[k(y+H)]}{\cos(kH)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}.$$

Q 17. Il y a résonance quand $\cos(kH) = 0$, soit pour

$$kH = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

La plus petite valeur de H correspond à

$$H = \frac{\pi}{2k} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi f}{c},$$

soit

$$\boxed{H = \frac{c}{4f}}.$$

Pour $f = 65$ Hz (fondamental de la barre de marimba), on obtient

$$\boxed{H = 1{,}33\ \mathrm{m}}.$$

Pour une longueur H donnée, les autres fréquences de résonances sont données par

$$k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2H} = \frac{2\pi f_n}{c}$$

soit

$$f_n = (2n+1)\frac{c}{4H} = (2n+1) f_1.$$

Seuls les harmoniques impairs présentent une résonance. Il n'y a donc pas de résonance pour la fréquence $4f_1$.

Q 18. Modifier la valeur de H permet d'ajuster la fréquence de résonance du tube, afin qu'elle coïncide avec celle de la barre (si la température de l'air varie, la célérité c dans l'air varie, ce qui modifie la fréquence de résonance du tube pour une longueur donnée).

3 — Vibration d'une cymbale

Q 19. Notons $\vec{k} = k_x\vec{u}_x + k_z\vec{u}_z$ le vecteur d'onde (l'onde se propage dans le plan (Oxz) de la cymbale).
On a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y\,; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k_x^4 y$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = k_z^4 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} = k_x^2 k_z^2 y.$$

L'équation d'onde proposée s'écrit alors

$$-\omega^2 + \frac{c_\ell^2 b^2}{12(1-\sigma^2)}\left(k_x^4 + k_z^4 + 2k_x^2 k_z^2\right) = 0.$$

Avec $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, on a

$$\boxed{\omega^2 = \frac{c_\ell^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} k^4}.$$

On a donc

$$\omega = \frac{c_\ell b}{2\sqrt{3}\sqrt{(1-\sigma^2)}} k^2,$$

soit

$$2\pi f = \frac{c_\ell b}{2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

La fréquence vaut donc

$$\boxed{f = \frac{\pi c_\ell b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{1}{\lambda^2}}.$$

Q 20. La vitesse de de phase est définie par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

d'où

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\pi c_\ell b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{1}{\lambda}}.$$

La vitesse de phase dépend de la longueur d'onde : **la propagation est dispersive**.

Q 21. Sur les clichés, le « paquet d'ondes » s'étale au cours du temps, ce qui est caractéristique d'une propagation dispersive.

Q 22. La longueur d'onde λ_1 se propage sur 4 cm pendant 30 µs, d'où $v_\varphi(\lambda_1) = \dfrac{4\times 10^{-2}}{30\times 10^{-6}}$ soit

$$\boxed{v_\varphi(\lambda_1) = 1{,}3\times 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}.$$

La longueur d'onde λ_2 se propage sur 4 cm pendant 60 µ · s, d'où $v_\varphi(\lambda_2) = \dfrac{4\times 10^{-2}}{60\times 10^{-6}}$ soit

$$\boxed{v_\varphi(\lambda_2) = 0{,}67\times 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}.$$

Le résultat théorique implique

$$\frac{v_\varphi(\lambda_2)}{v_\varphi(\lambda_1)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2},$$

ce qui est bien en accord avec les documents.

L'épaisseur est donnée par

$$b = \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi}\frac{v_\varphi}{c_\ell}\lambda = \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi} v_\varphi \sqrt{\frac{\rho}{E}}\lambda.$$

Pour λ_1 on calcule

$$b = \frac{\sqrt{3(1-0{,}34^2)}}{\pi}\frac{4\times 10^{-2}}{30\times 10^{-6}}\sqrt{\frac{8{,}7\times 10^3}{1{,}1\times 10^{11}}}6\cdot 10^{-3}$$

d'où $\boxed{b = 1{,}2\ \mathrm{mm}}$.