

## TD d'électromagnétisme n° 2

## Théorème de Gauss — solution

## 1 — Distribution à symétrie cylindrique

1. La distribution est à symétrie cylindrique :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$  en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Surface de Gauss : cylindre de rayon  $r$ , de hauteur  $H$ .

On a  $Q_{\text{int}} = H\lambda_0$ .

Théorème de Gauss :

$$2\pi r H E(r) = \frac{H\lambda_0}{\epsilon_0},$$

d'où

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

2. Symétrie cylindrique :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ .

Surface de Gauss : cylindre de rayon  $r$ , de hauteur  $H$  arbitraire.

Le flux de  $\vec{E}$  vaut alors

$$\oiint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = 2\pi r H E(r).$$

Pour  $r \geq a$ , on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 2\pi r H dr = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0 H a^2}{3}.$$

Pour  $r < a$ , on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 2\pi r' H dr' = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi\rho_0 H r^3}{3a}.$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 a} \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$

3. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Pour  $r \geq a$ , on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 2\pi r H dr = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0 H a^2}{3}.$$

Pour  $r < a$ , on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 2\pi r' H dr' = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi\rho_0 H r^3}{3a}.$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 a} \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$

## 2 — Distribution à symétrie sphérique

1. La distribution est à symétrie sphérique :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques.

Surface de Gauss : sphère de rayon  $r$ . Le flux du champ vaut  $4\pi r^2 E(r)$ .

Pour  $r \geq a$ , on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho_0 a^3}{3}.$$

Pour  $r < a$ , on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right).$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right) \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$

2. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Si  $r < a$ , on a  $Q_{\text{int}} = 0$ .

Si  $r > a$ , on a  $Q_{\text{int}} = \sigma_0 4\pi a^2$ .

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < a \\ \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > a. \end{cases}$$

On remarque que le champ est discontinu en  $r = a$ , la discontinuité valant

$$E(a^+) - E(a^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

### 3 — Champ créé par un cylindre chargé

1. Le champ à l'intérieur d'un cylindre uniformément chargé en volume a été établi en cours :

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r.$$

Cette loi est fonction linéaire de  $r$ , compatible avec le graphe.

D'après le graphe on a

$$E(r) = E_0 \frac{r}{a}$$

d'où en identifiant

$$\rho_0 = \frac{2\epsilon_0 E_0}{a}.$$

2. On détermine le champ à l'extérieur avec le théorème de Gauss comme à l'exercice 1 :

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = E_0 \frac{a}{r} \vec{e}_r \text{ pour } r \geq a.$$

3. Le potentiel est donné par  $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ , soit

$$\frac{dV}{dr} = \begin{cases} -E_0 \frac{r}{a} & \text{pour } r < a \\ -E_0 \frac{a}{r} & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

d'où

$$V(r) = \begin{cases} -E_0 \frac{r^2}{2a} + C_1 & \text{pour } r < a \\ -E_0 a \ln(r) + C_2 & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

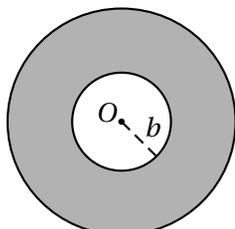
On ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini car on ne peut considérer  $r \rightarrow \infty$  pour un cylindre infini.

En choisissant  $V(a) = V_0$ , on obtient

$$V(r) = \begin{cases} \frac{E_0}{2a}(a^2 - r^2) & \text{pour } r < a \\ -E_0 a \ln\left(\frac{r}{a}\right) & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

### 4 — Champ dans une cavité sphérique

Le cas particulier où les deux centres  $O$  et  $O'$  sont confondus se traite facilement.



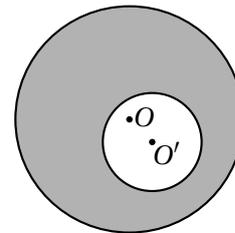
La distribution étant à symétrie sphérique, le champ est de la forme  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ .

Prenons comme surface de Gauss une sphère de centre  $O$ , de rayon  $r < b$ . Elle contient la charge  $Q_{\text{int}} = 0$ . Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$4\pi r^2 E(r) = 0$$

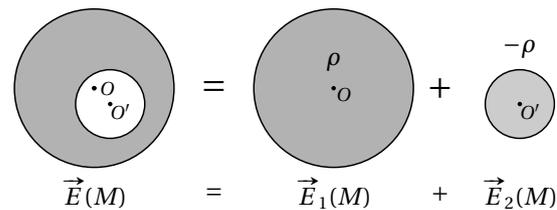
d'où  $\vec{E}(M) = \vec{0}$ . Le champ électrostatique est nul en tout point de la cavité.

Considérons le cas où les centres  $O$  et  $O'$  sont distincts.



Cette distribution n'est plus à symétrie sphérique; le théorème de Gauss n'est pas utilisable directement pour déterminer le champ électrostatique créé.

Le théorème de superposition permet de décomposer cette distribution en deux distributions à symétrie sphérique :



On se ramène donc au calcul du champ électrostatique créé à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée en volume.

La cavité étant l'intersection des deux sphères, il est inutile de calculer le champ à l'extérieur des sphères.

Calcul de  $\vec{E}_1(M)$  :

La distribution étant à symétrie sphérique, le champ est de la forme  $\vec{E}_1(M) = E_1(r) \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques de centre  $O$ . On prend comme surface de Gauss une sphère de centre  $O$ , de rayon  $r < a$ . On a alors  $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ; le théorème de Gauss s'écrit :

$$4\pi r^2 E_1(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

d'où  $E_1(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ . Le champ intérieur à la grande sphère s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Le champ  $\vec{E}_2(M)$  s'écrit sous une forme similaire, mais en faisant intervenir un autre système de coordonnées

sphériques, de centre  $O'$  :  $\vec{E}_2(M) = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0} \vec{e}'_r$ . Pour obtenir un résultat simple, il faut écrire les champs  $\vec{E}_1(M)$  et  $\vec{E}_2(M)$  sous une forme intrinsèque, sans faire intervenir les systèmes de coordonnées.

Le vecteur position s'écrit  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ ; le champ s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}$$

Pour la seconde sphère, on a de même :

$$\vec{E}_2(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O'M}$$

Appliquons le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OM} - \vec{O'M})$$

soit

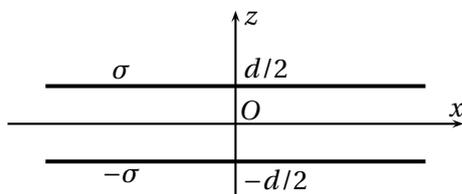
$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}$$

Le champ électrostatique est uniforme à l'intérieur de la cavité.

- On retrouve bien  $\vec{E}(M) = \vec{0}$  dans le cas où  $O$  et  $O'$  sont confondus.

## 5 — Deux plans de charges opposées

Utilisons les coordonnées cartésiennes, l'axe  $Oz$  étant perpendiculaire aux deux plans de cotes  $+\frac{d}{2}$  et  $-\frac{d}{2}$ .



Pour tout point  $M$  de l'espace, les plans  $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  et  $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  sont des plans de symétrie, donc le champ n'a pas de composante selon  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_x$ .

La distribution est invariante par translation selon  $Ox$  et  $Oy$ , donc les composantes du champ ne dépendent pas de  $x$  et de  $y$ .

Finalement, le champ est de la forme  $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$ .

Le plan  $Oxy$  est un plan d'antisymétrie de la distribution, donc  $E(-z) = -E(z)$  (le champ se réduit à sa composante normale  $\vec{E}_\perp$  au plan d'antisymétrie).

La distribution peut s'écrire comme la superposition de deux distributions : le plan de cote  $d/2$ , de charge surfacique  $\sigma$ , qui crée le champ  $\vec{E}_1(M)$ , et le plan de cote  $-d/2$ , de charge surfacique  $-d/2$ , qui crée le champ  $\vec{E}_2(M)$ . D'après le théorème de superposition, le champ créé par les deux plans est  $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ .

1. Se reporter à la couche infinie vue en cours.

On se ramène donc au calcul du champ créé par un plan infini, traité en cours :

$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > d/2 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < d/2 \end{cases}$$

et

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > -d/2 \\ \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -d/2 \end{cases}$$

On a donc

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > d/2 \\ -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } -d/2 < z < d/2 \\ \vec{0} & \text{pour } z < -d/2 \end{cases}$$

- La distribution possède *a priori* toutes les propriétés pour que l'on puisse utiliser le théorème de Gauss. On est tenté de choisir comme surface fermée un cylindre compris entre les cotes  $z$  et  $-z$ , mais on aura toujours  $Q_{\text{int}} = 0$ , et le flux de  $\vec{E}$  est nul; le théorème de Gauss conduit alors à la relation  $0 = 0 \dots$  qui est vraie mais guère utile!

## 6 — Nappe épaisse

1. Considérons un cylindre de section  $S$ , d'axe  $Ox$  (il « découpe une pièce cylindrique de section  $S$  et de longueur  $e$  de la distribution). Il porte la charge

$$Q = \rho S e + \sigma S.$$

Le système étant globalement neutre, on a  $Q = 0$ , d'où

$$\sigma = -\rho e.$$

2. Nous allons utiliser le principe de superposition, en écrivant qu'en tout point de l'espace le champ créé s'écrit

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{ép}}(M) + \vec{E}_{\text{fi}}(M),$$

où  $\vec{E}_{\text{ép}}(M)$  est le champ créé par la nappe épaisse et  $\vec{E}_{\text{fi}}(M)$  celui créé par la nappe fine.

### Champ créé par la nappe épaisse

Une étude des symétries et invariances<sup>1</sup> mène à un champ de la forme

$$\vec{E}_{\text{ép}} = E_{\text{ép}}(x) \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad E_{\text{ép}}(-x) = -E_{\text{ép}}(x).$$

L'étude est menée pour  $x \geq 0$ .

On applique le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée un cylindre de section  $S$ , d'axe  $Ox$ , compris entre  $-x$  et  $+x$ .

Le flux du champ est donné par

$$\Phi = 2SE_{\text{ép}}(x).$$

La charge intérieure est donnée par

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho e S & \text{pour } x \geq e/2 \\ \rho 2xS & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

L'application du théorème de Gauss conduit à

$$E_{\text{ép}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x \geq e/2 \\ \frac{\rho x}{\epsilon_0} & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

On étend l'expression à tout l'espace de façon à obtenir une fonction impaire :

$$E_{\text{ép}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x \geq e/2 \\ \frac{\rho x}{\epsilon_0} & \text{pour } -e/2 < x < e/2 \\ -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x \leq -e/2. \end{cases}$$

### Champ créé par la nappe fine

Considérons la nappe située en  $x = 0$ ; nous avons établi le champ  $\vec{E}_{\text{fi}} = E_{\text{fi}}(x)\vec{e}_x$  créé en cours à l'aide du théorème de Gauss :

$$E_{\text{fi}}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Dans le cas d'une nappe située en  $x = e/2$ , on en déduit l'expression du champ créé :

$$E_{\text{fi}}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > e/2 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

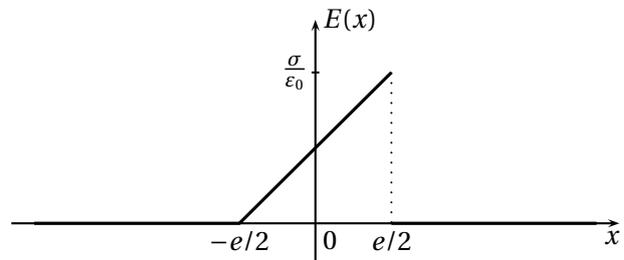
Compte tenu de la relation  $\rho + \sigma e = 0$  traduisant la neutralité globale, on peut écrire

$$E_{\text{fi}}(x) = \begin{cases} -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x > e/2 \\ \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } x < e/2. \end{cases}$$

On en déduit l'expression du champ en tout point de l'espace par superposition :

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x > e/2 \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(x + \frac{e}{2}\right) \vec{e}_x & \text{pour } -e/2 < x < e/2 \\ \vec{0} & \text{pour } x < -e/2. \end{cases}$$

Représentons la composante du champ  $\vec{E}$  :



➤ On retrouve la discontinuité  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  du champ lors de la traversée de la nappe chargée en surface.

3. On a

$$dV = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = -E(x) dx,$$

d'où

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \int_B^A dV = - \int_{-e/2}^{e/2} E(x) dx,$$

soit

$$U_{AB} = \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(x + \frac{e}{2}\right) dx = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{ex}{2} \right]_{-e/2}^{e/2},$$

d'où

$$U_{AB} = \frac{\rho e^2}{2\epsilon_0}.$$

## 7 — Couche chargée

On se place en coordonnées cartésiennes.

Choisissons des coordonnées cartésiennes, le plan de la distribution étant défini par  $z = 0$ . Le champ s'écrit *a priori* en tout point de l'espace :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

La distribution étant invariante par toute translation selon  $Ox$  ou  $Oy$ , les composantes du champ électrostatique ne dépendent que de la variable  $z$  :

$$\vec{E}(M) = E_x(z)\vec{e}_x + E_y(z)\vec{e}_y + E_z(z)\vec{e}_z$$

Pour tout point  $M$  de l'espace, le plan  $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc  $E_y(M) = 0$ . Le plan  $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  étant un plan de symétrie de la distribution,  $E_x(M) = 0$ .

Finalement :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$$

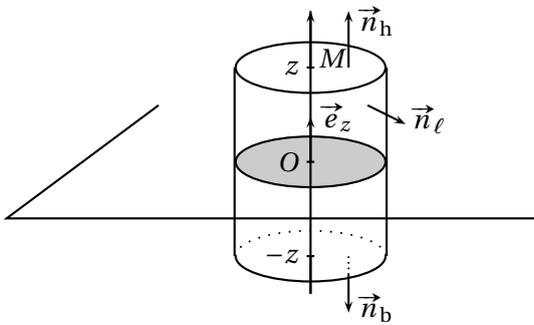
1. Le plan  $Oxy$  est un plan de symétrie de la distribution.

Soit  $M(x, y, z)$ , avec  $z > 0$ . Le symétrique de  $M$  par rapport au plan de symétrie  $Oxy$  est  $M'(x, y, -z)$ . Le champ se réduisant à sa composante normale à ce plan, il se transforme selon  $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ , soit :

$$E(-z) = -E(z)$$

**Compte tenu de la parité de  $E(z)$ , nous déterminons le champ pour  $z > 0$ .**

Étant donné un point  $M(z > 0)$ , considérons la surface fermée constitué d'un cylindre d'axe  $Oz$ , de section  $S$ , compris entre les cotes  $-z$  et  $z$  :



► La section du cylindre peut être de forme quelconque.

Le flux sortant du champ électrostatique à travers la surface supérieure, de vecteur surface élémentaire  $d\vec{S} = dS\vec{n}_h = dS\vec{e}_z$ , vaut :

$$\iint_{S_H} E(z)\vec{e}_z d\vec{S} = \iint_{S_H} E(z) dS = E(z) \iint_{S_H} dS = SE(z).$$

Le flux sortant du champ électrostatique à travers la surface inférieure, de vecteur surface élémentaire  $d\vec{S} = -dS\vec{n}_b = -dS\vec{e}_z$ , vaut :

$$\iint_{S_H} E(-z)\vec{e}_z d\vec{S} = - \iint_{S_H} E(-z) dS = -SE(-z) = SE(z)$$

compte tenu de  $E(-z) = -E(z)$ .

En tout point de la surface latérale de vecteur normal unitaire  $\vec{n}_l$ , le champ électrostatique est normale à cette surface; le flux latéral est donc nul.

Finalement :

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 2SE(z)$$

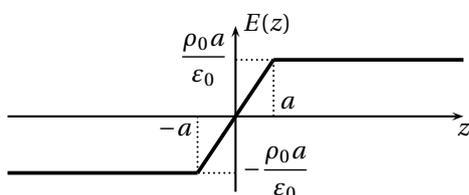
Pour le calcul de la charge intérieure, il faut envisager deux cas :

$0 < z < a$  : on a  $Q_{\text{int}} = 2zS\rho_0$ , d'où  $E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z$ ;

$z > a$  : on a  $Q_{\text{int}} = 2aS\rho_0$ , d'où  $E(z) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}$ .

On étend l'expression du champ compte tenu du fait que  $E(z)$  est fonction impaire de  $z$  :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z \leq a \\ -\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a \end{cases}$$



2. Cette fois, le plan  $Oxy$  est un plan d'anti-symétrie de la distribution.

Soit  $M(x, y, z)$ , avec  $z > 0$ . Le symétrique de  $M$  par rapport au plan de symétrie  $Oxy$  est  $M'(x, y, -z)$ . Le champ se réduisant à sa composante normale à ce plan, il se transforme selon  $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ , soit :

$$E(-z) = E(z).$$

**Attention :** l'utilisation directe du théorème de Gauss ne mène à rien! En choisissant comme surface fermée un cylindre de section  $S$ , compris entre les cotes  $-z < 0$  et  $z > 0$ , le flux du champ électrique s'écrit

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) d\vec{S}_M = SE(z) - SE(-z) = 0.$$

On calcule  $Q_{\text{int}} = 0$ , et le théorème de Gauss conduit à  $0 = 0$ , relation certes exacte, mais qui ne nous avance pas beaucoup!

Il faut utiliser le principe de superposition, en décomposant la distribution en deux couches chargées :

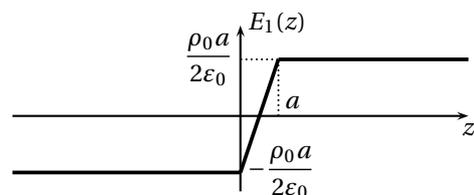
- l'une de densité volumique  $\rho_0$ , comprise entre  $z = 0$  et  $z = +a$ , qui crée dans tout l'espace le champ  $\vec{E}_1(M)$ ;
- l'autre de densité volumique  $-\rho_0$ , comprise entre  $z = -a$  et  $z = +0$ , qui crée dans tout l'espace le champ  $\vec{E}_2(M)$ .

Le champ total est  $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ .

Il suffit d'adapter la question précédente; la couche avait une largeur  $2a$  ( $-a \leq z \leq a$ ); ici elle a une largeur  $a$ . Le champ créé par une couche de densité volumique  $\rho_0$  comprise entre  $z = -a/2$  et  $z = a/2$  est

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a/2 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \vec{e}_z & \text{pour } -a/2 \leq z \leq a/2 \\ -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a/2 \end{cases}$$

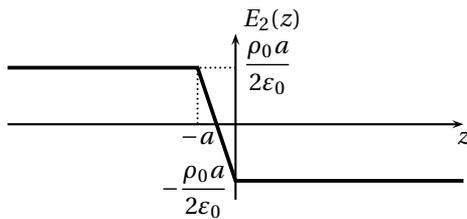
Le champ créé par la couche de densité  $\rho_0$  comprise entre  $z = 0$  et  $z = a$  s'en déduit par un changement d'origine :



Il a pour expression

$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(z - \frac{a}{2}\right) \vec{e}_z & \text{pour } 0 \leq z \leq a \\ -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

Par changement de signe ( $\rho_0 \rightarrow -\rho_0$ ) et changement d'origine, on détermine le champ créé par une couche de densité  $-\rho_0$  comprise entre  $z = 0$  et  $z = -a$  :

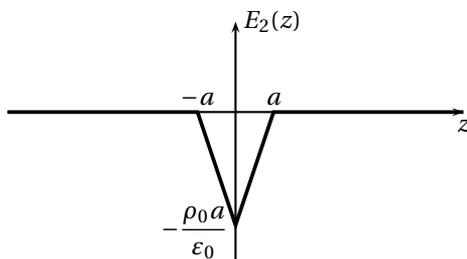


Son expression est

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{2} - z\right) \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z \leq 0 \\ \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a \end{cases}$$

On en déduit le champ total par superposition :

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (z - a) \vec{e}_z & \text{pour } 0 \leq z \leq a \\ -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} (a + z) \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z < 0 \\ \vec{0} & \text{pour } z < -a \end{cases}$$



3. Nous sommes dans le cas d'une distribution présentant les mêmes symétries et invariances que le cas 1. Le champ est donc de la forme

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad E(-z) = E(z).$$

On mène donc l'étude pour  $z > 0$ .

La surface de Gauss est un cylindre de section  $S$ , d'axe  $Oz$ , comprise entre  $-z$  et  $+z$ ; le flux vaut  $\Phi = 2E(z)S$ .

Le calcul de la charge intérieure diffère.

1<sup>er</sup> cas :  $z > a$ . On a

$$Q_{\text{int}} = \int_{-a}^a \rho(z) S dz = \rho_0 S \int_{-a}^a \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) S dz = \frac{4}{3} \rho_0 S a.$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$2SE(z) = \frac{4\rho_0 Sa}{3\epsilon_0}$$

d'où

$$E(z) = \frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0}.$$

2<sup>e</sup> cas :  $0 < z \leq a$ . On a

$$Q_{\text{int}} = \int_{-z}^z \rho(z') S dz' = \rho_0 S \int_{-z}^z \left(1 - \frac{z'^2}{3a^2}\right) S dz' = 2\rho_0 S z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right).$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

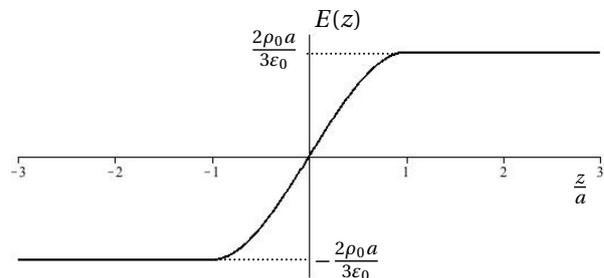
$$2SE(z) = \frac{2\rho_0 S}{\epsilon_0} z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right),$$

d'où

$$E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right).$$

On en déduit le champ dans tout l'espace en construisant une fonction impaire :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \left(1 - \frac{z^2}{3a^2}\right) \vec{e}_z & \text{pour } -a \leq z \leq a \\ -\frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -a \end{cases}$$



## 8 — Modèle de l'atome

1. Densité volumique de charge :  $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$ .

La distribution est à symétrie sphérique; on a donc  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques.

Théorème de Gauss avec une sphère de rayon  $r$  :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{e}{\epsilon_0} & \text{pour } r \geq a \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} & \text{pour } r < a \end{cases}$$

d'où

$$E(r) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{pour } r \geq a \\ \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} & \text{pour } r < a \end{cases}$$

Pour  $r \geq a$ , avec  $V(\infty) = 0$ , on a  $V(r \geq a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Pour  $r < a$ , on a  $V(r) = -\frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + A$ . La continuité du potentiel en  $r = a$  s'écrit

$$V(a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 a} + A_2$$

d'où

$$A_2 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

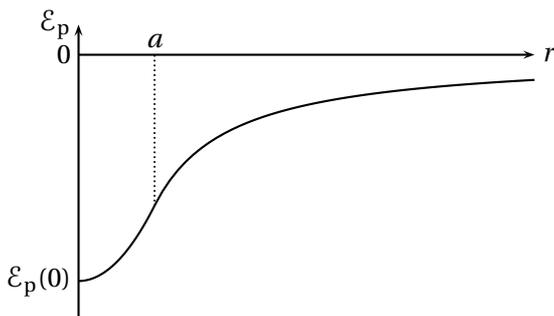
On en déduit

$$V(r < a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right).$$

► Pour  $r \geq a$ , on retrouve le champ et le potentiel créés par une charge ponctuelle.

2. L'énergie potentielle d'un électron soumis au champ créé par le noyau est  $\mathcal{E}_p = -eV(r)$ , soit

$$\mathcal{E}_p = \begin{cases} -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{pour } r > a \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left( \frac{r^2}{2a^2} - \frac{3}{2} \right) & \text{pour } r < a \end{cases}$$



► La courbe  $V(r)$ , et donc  $\mathcal{E}_p(r) = -eV(r)$ , a une tangente continue en  $r = a$  : le champ  $E(r)$  est continu, et  $\frac{dV}{dr} = -E(r)$ .

L'énergie d'ionisation est l'énergie à apporter à l'électron pour l'apporter du centre (position d'équilibre) à l'infini avec une vitesse nulle.

Elle vaut donc  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_p(\infty) - \mathcal{E}_p(0)$ , soit

$$\mathcal{E}_i = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

L'énergie d'ionisation en électron-volt (1 eV =  $1,6 \times 10^{-19}$  J) est donnée par

$$\mathcal{E}_i = \frac{3 \cdot 9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{2 \cdot 100 \times 10^{-12}}$$

soit  $\mathcal{E}_i = 21,6 \text{ eV}$ .

On ne retrouve pas la valeur réelle, mais l'ordre de grandeur est tout à fait comparable.

3. Position d'équilibre stable en  $r = 0$ .

Quand il est à l'intérieur de l'atome, l'atome est soumis à la force de rappel élastique  $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OM}$ . Le PFD s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OM} = \vec{0}.$$

Oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}.$$

On calcule la fréquence propre associée :

$$f_0 = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m a^3}} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{2\pi} \sqrt{\frac{9 \times 10^9}{9,1 \times 10^{-31} \times 10^{-31}}} = \frac{1,6}{2\pi} 10^{16}$$

soit  $f_0 = 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$ .

La longueur d'onde correspondante est  $\lambda = c/f = 120 \text{ nm}$  : on est dans le domaine des **ultraviolets**.

## 9 — Potentiel de Yukawa

1. La relation locale  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$  conduit à

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{qe^{-r/a}}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar} \right] \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a} \vec{e}_r.$$

2. Le champ étant radial, de la forme  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ , le flux à travers une sphère de rayon  $r$  est donné par

$$\Phi(r) = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r),$$

soit

$$\Phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ 1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a}.$$

Le théorème de Gauss s'écrit

$$\Phi(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0},$$

d'où

$$Q(r) = q \left[ 1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a}.$$

3. On a

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = q.$$

**Il existe une charge ponctuelle  $q$  située au point  $O$ .**

4. On a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0.$$

**La distribution est globalement neutre.**

La charge  $q$  située en  $O$  est donc entourée d'un « nuage » à symétrie sphérique, de charge totale  $-q$ .

5. La relation de Maxwell-Gauss s'écrit :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Dans le cas où  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ , on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 E(r)]}{dr} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{r/a} (1 + e^{-r/a}) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-r/a} \left[ \frac{1}{a} + \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(-\frac{1}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

soit

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2 r} e^{-r/a}.$$

On en déduit

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-r/a}.$$

On peut calculer cette densité volumique sans utiliser l'opérateur divergence. C'est moins dans l'esprit du programme actuel, mais je vous donne aussi cette méthode.

Le flux sortant de  $\vec{E}$  à travers la sphère de rayon  $r$  est

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}.$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée délimitant la coquille de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  : ce volume est donc compris entre la sphère de rayon  $r$  et la sphère de rayon  $r + dr$ .

Le flux **sortant** de ce volume s'écrit

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = -\Phi(r) + \Phi(r + dr) = \frac{d\Phi}{dr} dr$$

car  $\Phi(r)$  « entre » dans la coquille tandis que  $\Phi(r + dr)$  en sort.

La charge comprise dans ce volume est<sup>2</sup>

$$\delta Q_{\text{int}} = \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$\frac{d\Phi}{dr} dr = \frac{4\pi r^2}{\epsilon_0} \rho(r) dr$$

d'où

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d\Phi}{dr}.$$

On calcule

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{q}{\epsilon_0} e^{-r/a} \left[ \frac{1}{a} + \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(-\frac{1}{a}\right) \right] = -\frac{q}{\epsilon_0 a^2} r e^{-r/a}.$$

On retrouve alors

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2 r} e^{-r/a}.$$

2. On considère la densité  $\rho(r)$  dans la coquille de volume  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ .

6. Cette distribution peut représenter l'atome d'hydrogène dans son état fondamental :

- la charge  $q$  au centre est le proton ( $q = +e$ );
- Le « nuage » de densité  $\rho(r)$  et de charge totale  $-q = -e$  représente le « nuage électronique », c'est-à-dire l'orbitale 1s de l'électron.

En effet, la charge comprise entre  $r$  et  $r + dr$  est

$$\delta Q(r) = \delta Q_{\text{int}} = 4\pi r^2 \rho(r) dr,$$

soit

$$\delta Q(r) = -\frac{q}{a^2} r e^{-r/a} dr.$$

On peut définir une densité radiale de charge

$$P(r) = \frac{\delta Q(r)}{dr} = -\frac{q}{a^2} e^{-r/a}.$$

Cette densité est équivalente à la densité de probabilité de présence de l'électron dans une description quantique de l'atome d'hydrogène. Elle est maximum en  $r_0$  tel que

$$P'(r_0) = 0 = -\frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) e^{-r_0/a}$$

soit  $r_0 = a$ . Cette grandeur représente le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène.

## 10 — Oscillations dans un tunnel

Le satellite, en orbite circulaire, est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$ . Le principe fondamentale de la dynamique projeté sur le vecteur  $\vec{e}_r$  des coordonnées sphériques de centre  $C$  s'écrit :

$$-m \frac{v^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2}$$

d'où  $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ . La période  $T_Q = 2\pi R / v$  vaut donc :

$$T_Q = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

On retrouve la troisième loi de Kepler :  $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ .

### Étude du mouvement du mobile P

Le mobile est soumis à :

- la réaction  $\vec{N}$  du tunnel, normal à l'axe  $Ox$  car les frottements sont négligés;
- la force gravitationnelle  $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}(P)$ , où  $\vec{\mathcal{G}}(P)$  est le champ de gravitation créé en  $P$  par l'astre.

En négligeant le trou créé par le tunnel, on peut considérer que l'astre est une distribution de masse à symétrie sphérique, avec une masse volumique  $\rho$  uniforme. Le champ de gravitation s'écrit donc en coordonnées sphériques de centre  $C$  :

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$$

Le théorème de Gauss permet de calculer le champ de gravitation à l'intérieur de l'astre. En choisissant comme surface de Gauss une sphère de centre  $C$ , de rayon  $r = CP < R$ , on a :

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi M_{\text{int}}$$

La masse de l'astre étant uniformément répartie,  $M = \frac{4}{3}\rho R^3$  et  $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\rho r^3$ , on a  $M_{\text{int}} = M \frac{r^3}{R^3}$ , d'où :

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = -\frac{GM}{R^3} r \vec{e}_r = -\frac{GM}{R^3} \overrightarrow{CP}$$

Le mobile est donc soumis à la force :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^3} \overrightarrow{CP}$$

La rotation de l'astre étant négligée, on peut considérer le référentiel lié à l'astre comme galiléen, et y appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile :

$$m \vec{a}(P) = \vec{N} + \vec{F}$$

En projection sur  $Ox$ , il vient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^3} x$$

soit  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ , avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ .

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique.

La solution générale est

$$x(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t.$$

Comme  $x(0) = \alpha = -\sqrt{R^2 - a^2}$ , et  $\dot{x}(0) = \beta \omega_0 = 0$ , on a :

$$x(t) = -\sqrt{R^2 - a^2} \cos \omega t$$

On a  $-\sqrt{R^2 - a^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - a^2}$  : le mobile ne sort pas du tunnel ; il effectue donc des oscillations harmoniques avec la période :

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

La période des oscillations est indépendante de la distance  $a$  du tunnel au centre de l'astre.

Le satellite effectue un mouvement circulaire avec la période  $T_Q$  ; le mobile oscille avec la même période  $T_P$ . Les deux objets, partant initialement du point  $A$ , s'y rencontreront avec la période  $T = T_P = T_Q$ , soit

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

► Si  $a = 0$ , les deux mobiles se rencontreront également au point  $B$  ; la périodicité de leurs rencontres sera alors de  $T = T_P/2$ , soit :

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}$$

## 11 — Grotte alors !

1. Théorème de Gauss pour la gravitation :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi GM_{\text{int}}$$

2. Problème à symétrie sphérique :  $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{u}_r$ , et

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot d\vec{S}_M = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r).$$

Pour  $r < R$ , on a  $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3$  et

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G \frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3$$

d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} r.$$

Dans la planète, on a  $\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} r \vec{u}_r$  soit

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} \overrightarrow{OM}.$$

3. Principe de superposition ; la planète avec la grotte est décrite comme la superposition des deux distributions de masse suivantes :

- une boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ , de masse volumique uniforme  $\rho_0$  ;
- une boule de centre  $C$  et de rayon  $a$ , de masse volumique uniforme  $-\rho_0$ .

La planète pleine crée le champ

$$\vec{\mathcal{G}}_1(M) = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} \overrightarrow{OM}.$$

Une sphère de centre  $C$  portant la masse volumique  $-\rho_0$  crée le champ

$$\vec{\mathcal{G}}_2(M) = \frac{4\pi G \rho_0}{3} \overrightarrow{CM}.$$

Le champ total dans la cavité est

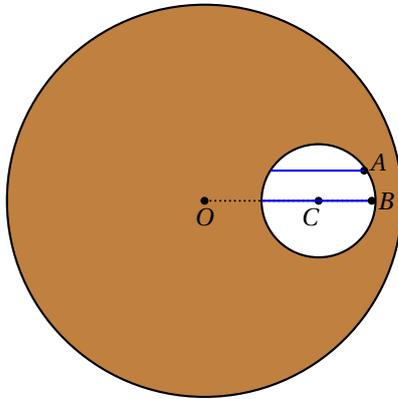
$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{\mathcal{G}}_1(M) + \vec{\mathcal{G}}_2(M),$$

soit

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 G \overrightarrow{CO}.$$

**Le champ gravitationnel est uniforme dans la grotte, colinéaire à  $\vec{CO}$ .**

Les deux masses ont des trajectoires rectilignes, représentées en bleu sur le schéma. L'accélération étant la même, constante, pour les deux pierres, c'est celle lâchée du point  $A$  (trajectoire la plus courte) qui touchera l'autre extrémité de la grotte en premier.



*Question bonus* : calculer le temps mis pour la trajectoire la plus longue. On pose  $OC = D$

Masse  $B$ . PFD sur l'axe  $OC$  :  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi \rho_0 G D m$

On a  $r(t) = -\frac{2}{3} \pi \rho_0 G D t^2 + D + a$ . On veut  $r(t_1) = D - a$ , d'où

$$t_1 = \sqrt{\frac{3a}{\pi \rho_0 G D}}.$$