

Mécanique PCSI

I — Cinématique

Référentiel d'observation

Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par la donnée de 3 axes rattachés à un **solide de référence**.

- Un solide idéal est un système dont les distances entre ses différents points restent constantes au cours du temps.
- Un tel repère est caractérisé par un point O choisi comme origine, et une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ généralement orthonormée.

Repère de temps

Un repère de temps est défini par la donnée d'un instant t_0 de référence et d'une échelle de temps permettant de mesurer des durées.

- Dans le cadre de la relativité galiléenne, le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels.

Référentiel

Un référentiel est défini par la donnée d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Exemples :

- le *référentiel terrestre* (ou *référentiel du laboratoire*) dont le solide de référence est la Terre ;
- le *référentiel géocentrique* attaché à des axes issus de centre de la Terre et dirigés vers des étoiles fixes ;
- le *référentiel héliocentrique* attaché à des axes issus de centre du Soleil et dirigés vers des étoiles fixes ;

Vecteur position

Soit un référentiel (\mathcal{R}) et O un point origine fixe dans (\mathcal{R}) . La position à l'instant d'un point M dans l'espace est repérée par son **vecteur position**

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t).$$

La **trajectoire** d'un point M dans le référentiel (\mathcal{R}) est l'ensemble de points qu'il occupe au cours du temps.

- La trajectoire d'un point dépend du référentiel d'étude.

Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** d'un point M dans un référentiel (\mathcal{R}) est défini par

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

- Le vecteur vitesse dépend du référentiel d'étude.
- En chaque point de la trajectoire, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- Les composantes du vecteur vitesse s'expriment en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- La dérivation du vecteur position s'effectue dans le référentiel (\mathcal{R}) .

Vecteur accélération

Le **vecteur accélération** d'un point M dans un référentiel (\mathcal{R}) est défini par

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}.$$

- Le vecteur accélération dépend du référentiel d'étude.
- Les composantes du vecteur accélération s'expriment en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Bases de projection

Les vecteurs \vec{OM} , $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ peuvent être décrits par leurs composantes sur une base de projection. On utilise une base orthonormée directe, constituée de trois vecteurs ($\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$) unitaires ($\|\vec{e}_i\| = 1$) et orthogonaux. L'espace est conventionnellement orienté dans le sens direct.

Coordonnées cartésiennes

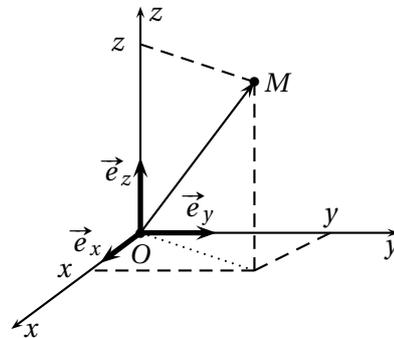
Un point est repéré par ses trois coordonnées x, y et z :

$$M(x, y, z).$$

Le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.

Le vecteur accélération s'écrit $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.



- La base cartésienne est une **base fixe** : les vecteurs \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z sont indépendants de M et fixes dans \mathcal{R} .

Coordonnées cylindriques

Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et z :

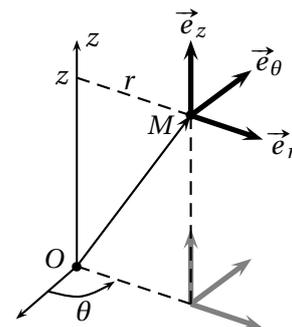
$$M(r, \theta, z).$$

Le vecteur position s'écrit $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

Le vecteur accélération s'écrit

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$



- La base cartésienne est une **base mobile** : les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent de M et ne sont pas fixes dans \mathcal{R} si M est mobile.
- Les expressions de la vitesse et de l'accélération se retrouvent facilement à l'aide des relations :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

- Ces relations sont issues de $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$.

Choix de la base de projection

La base de projection est indépendante du référentiel \mathcal{R} dans lequel est étudié le mouvement.

Un choix judicieux de système de coordonnées peut considérablement simplifier l'étude d'une trajectoire : la base cylindrique sera choisie pour l'étude d'un mouvement circulaire.

Mouvement uniformément accéléré

Un tel mouvement est caractérisé par un vecteur accélération constant $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_0$.

► On en déduit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$ et $\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0$ en notant $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ et M_0 la position de M en $t=0$.

Si \vec{v}_0 et \vec{a}_0 sont colinéaires, le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.

► La base cartésienne est adaptée à l'étude d'un mouvement rectiligne. En prenant $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$, on en déduit $\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_x$ avec $v(t) = a_0 t + v_0$, et $\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x$ avec $x(t) = \frac{1}{2} t^2 + v_0 t + x_0$.

Si $\vec{a}_0 = \vec{0}$, le mouvement est **rectiligne uniforme**. Avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, on obtient en projection selon \vec{e}_x : $v(t) = v_0$ et $x(t) = v_0 t + x_0$.

Mouvement circulaire

Un mouvement circulaire de centre O est défini, en coordonnées polaires de centre O , par $r = R$ constant.

On en déduit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

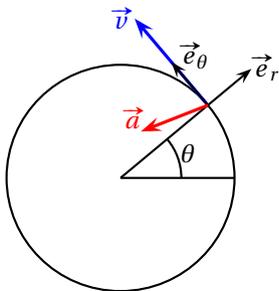
En notant $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v(t) \vec{e}_\theta$, soit $v(t) = R\dot{\theta}$ on peut écrire

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta .$$

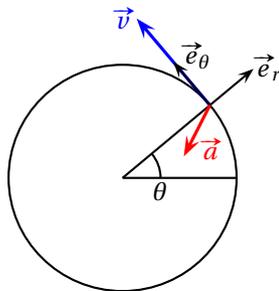
Mouvement circulaire accéléré (1) : v augmente au cours du temps.

Mouvement circulaire décéléré (2) : v diminue au cours du temps.

Mouvement **circulaire uniforme** : $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ (vitesse angulaire constante).



(1)



(2)

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r .$$

