Mécanique PCSI III — Étude énergétique du mouvement

Travail d'une force

Le travail fourni par une force $\vec{F}$ s'appliquant en point M subissant un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est le scalaire défini par

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\,.$$

Le travail a la dimension d'une énergie et s'exprime en joule (J).
Le travail dépend du référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

- Le travail élémentaire δW est la quantité d'énergie reçue (algébriquement) par le point M par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$ lors du déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell}$.
- Si $\delta W > 0$, la force est dite *motrice* : le point reçoit effectivement de l'énergie par l'intermédiaire de la force.
  Si $\delta W < 0$, la force est dite *résistante* : le point cède de l'énergie.
- Si la force est normale à la trajectoire du point M, elle ne travaille pas.

Le travail de la force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de M_1 à M_2 le long d'une trajectoire Γ est donné par

$$\boxed{W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1(\Gamma)}^{M_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}\,.$$

- Mathématiquement, le travail est donné par la *circulation* de la force le long du chemin Γ.
- Dans le cas d'un champ de force constant et uniforme $\vec{F}_0$, on a $W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_0) = \vec{F}_0 \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le scalaire défini par

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}\,.$$

La puissance s'exprime en watt (W).

- La puissance dépend du référentiel (*via* $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$).

Théorème de l'énergie cinétique

Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est le scalaire positif défini par

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}_{/\mathcal{R}}(M)\,.$$

- L'énergie cinétique d'un point matériel dépend du référentiel $\mathcal{R}$.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égal au travail de la force appliquée le long de la trajectoire suivie :

$$\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(t_2) - E_\mathrm{c}(t_1) = W_{M_1 \to M_2}(\vec{F})$$

Le travail de la force $\vec{F}$ représente l'énergie cédée (algébriquement) au point matériel M par l'intermédiaire de cette force, augmentant (ou diminuant) ainsi l'énergie cinétique de ce point.

- Si $W > 0$ (force motrice), le point a acquis de l'énergie (cinétique) par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$. Le travail de $\vec{F}$ représente l'énergie transférée au point M par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$.

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de la force qu'il subit :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)\,.$$

- Le théorème de la puissance cinétique est souvent plus simple à utiliser que le théorème de l'énergie cinétique : la puissance d'une force est un simple produit scalaire, tandis que le travail s'exprime *a priori* sous la forme d'une intégrale le long de la trajectoire suivie...

Énergie potentielle, énergie mécanique

Force conservative

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si son travail entre deux point est indépendant de la trajectoire suivie entre ces points.
Dans le cas d'une trajectoire fermée Γ, le travail de la force est nul :

$$W = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \quad \forall \Gamma$$

- Une force conservative ne peut globalement pas apporter de l'énergie à un point matériel s'il suit une trajectoire fermée.
- Dans le cas où le travail de la force dépend du chemin suivi entre les deux points considérés, la force est dite *non conservative*.

Énergie potentielle d'un point matériel

Soit un point matériel soumis à une force conservative $\vec{F}$. Le travail élémentaire de $\vec{F}$ peut s'écrire comme l'opposé de la variation d'une grandeur $E_\mathrm{p}(M)$ appelée **énergie potentielle** du point M :

$$\delta W = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}(M)\,.$$

L'énergie potentielle ne dépend que de la position de M.

Le travail de la force $\vec{F}$ est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle associée : on peut considérer que la force $\vec{F}$ a transformé une partie de l'énergie potentielle du point M en énergie cinétique.
La différentielle de l'énergie potentielle s'écrit, par définition du gradient

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\delta W = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

d'où en identifiant $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p}}$.

- Si $W > 0$, on a $-\Delta E_\mathrm{p} < 0$: l'énergie apportée au point M par la force $\vec{F}$ est égale à la diminution de l'énergie potentielle de ce point.
  Si $W < 0$, on a $-\Delta E_\mathrm{p} > 0$: l'énergie prélevée au point M par la force $\vec{F}$ est égale à l'augmentation de l'énergie potentielle de ce point.
- Lorsque le point M se déplace de M_1 à M_2, le travail de la force conservative s'écrit

$$\boxed{W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -\Delta E_\mathrm{p}(M) = E_\mathrm{p}(M_1) - E_\mathrm{p}(M_2)}\,.$$

- L'énergie potentielle est ainsi définie à une constante additive près. On doit choisir une position de référence M_0 telle que $E_\mathrm{p}(M_0) = 0$.
- L'énergie potentielle de pesanteur ne dépend que de l'altitude du point : $\boxed{E_\mathrm{p}(z) = mgz + E_\mathrm{p0}}$, où $\vec{e}_z$ est la vertical ascendante et $E_\mathrm{p0} = E_\mathrm{p}(z=0)$ une origine (choisie arbitrairement).
- L'énergie potentielle élastique dont dérive la force élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 s'écrit $\boxed{E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2}$. On choisit conventionnellement $E_\mathrm{p} = 0$ quand le ressort est au repos ($l = l_0$).

Énergie mécanique d'un point matériel

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}\,.$$

Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel se déplaçant de M_1 à M_2 est égal au travail des forces non conservatives le long du trajet correspondant :

$$\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(M_2) - E_\mathrm{m}(M_1) = W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_\mathrm{n.c.})$$

Système conservatif

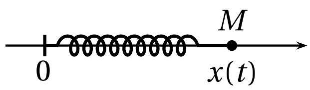
L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas est conservée au cours de son mouvement :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \mathrm{cte} \tag{1}$$

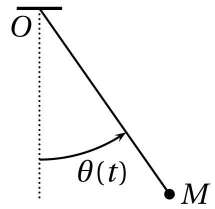
Un tel système est dit conservatif.
La relation (1) est appelée **intégrale première du mouvement**.

Équilibre d'un système conservatif à un degré de liberté

Un problème est dit à un degré de liberté si la position du point matériel étudié est entièrement déterminée par la donnée d'une seule variable $q(t)$.
Exemples :



Position repérée par la variable $q(t) = x(t)$



Position repérée par la variable $q(t) = \theta(t)$

- Dans le cas d'un système conservatif, les forces dérivent d'une énergie potentielle qui ne dépend que de la position du point : $E_\mathrm{p}(q)$.
- L'énergie cinétique est de la forme $E_\mathrm{c}(\dot{q})$: elle dépend de la « vitesse » $\dot{q}$.

Un point matériel est dans une position d'équilibre à la position q_e si la courbe $E_\mathrm{p}(q)$ possède une tangente horizontale en ce point :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}q}\right)_{q_\mathrm{e}} = 0\,.$$

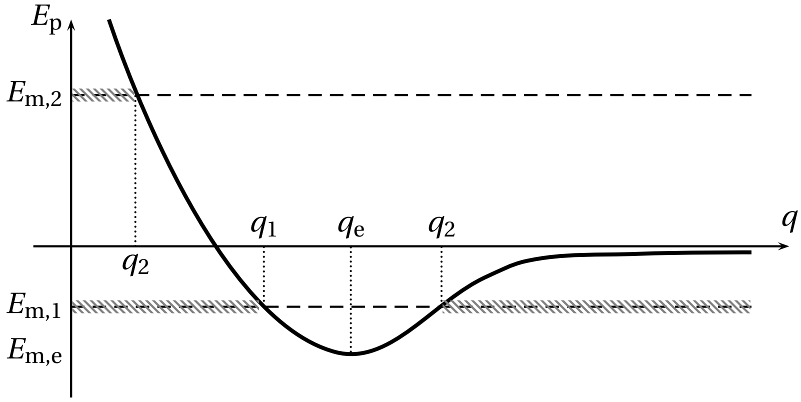
- En un point d'équilibre, l'énergie potentiel présente un maximum, un minimum, ou passe par un point d'inflexion.

La position d'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimum en ce point.

Étude graphique du mouvement d'un problème à un degré de liberté

L'énergie mécanique est une constante du mouvement : $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}$.
Comme $E_\mathrm{c} \geqslant 0$, seules sont accessibles les positions q telles que $E_\mathrm{m} \geqslant E_\mathrm{p}(q)$.

- Aux points où que $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{p}$, la vitesse est nulle.



1$^{\text{er}}$ cas : énergie mécanique $E_{\mathrm{m},1}$. Les régions $q(t) < q_1$ et $q(t) > q_2$ sont interdites. La vitesse est nulle aux positions q_1 et q_2. Le système a un mouvement périodique : il effectue des oscillations entre q_1 et q_2. On dit qu'il est dans un **état lié**.
2$^{\text{e}}$ cas : énergie mécanique $E_{\mathrm{m},2}$. La régions $q(t) < q_0$ est interdite. La vitesse est nulle à la position q_0. Si le système atteint cette position, il s'en éloigne ensuite dans jamais y revenir ($q(t) \to +\infty$). On dit qu'il est dans un **état de diffusion**.
3$^{\text{e}}$ cas : la position $q(t) = q_\mathrm{e}$ est une position d'équilibre stable (minimum de l'énergie potentielle). L'énergie mécanique du système vaut $E_{\mathrm{m,e}} = E_{\mathrm{p,min}}$.