Mécanique PCSI — IV — Forces centrales

Champ de force centrale

Une force est dite centrale si son support passe toujours par un point fixe O appelé centre de force :

$$\vec{F}(M) = F(M)\,\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}.$$

Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$ est une constante du mouvement.

Le théorème du moment cinétique s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = \vec{0}$ pour une force centrale.

- Conséquence : $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)$ sont toujours perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}_O$.

Le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan, contenu dans le plan passant par le centre de force O, normal au moment cinétique $\vec{L}_O$.

- On se place en coordonnées polaires dans ce plan.

Loi des aires :

$$r^2\dot{\theta} = \mathrm{C}$$

où C est une constante appelée **constante des aires**.

- On a $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M) = r\,\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\,\vec{e}_r + mr\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z = mC\,\vec{e}_z$.
- Pendant $\mathrm{d}t$, le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye une aire $\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta = \dfrac{C}{2}$.
- La vitesse du point matériel augmente quand il se rapproche du centre de force.
- **Le caractère plan du mouvement et la loi des aires sont valables pour tout champ de force centrale, conservatif ou non.**

Champ de force conservatif

Un champ de force conservatif est de la forme $\vec{F}(M) = F(r)\,\vec{e}_r$. L'énergie potentielle associée est définie par

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}.$$

Exemples

Nature de la force	Force	Énergie potentielle
Interaction gravitationnelle	$\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{G}m_1m_2}{r^2}\,\vec{e}_r$	$E_\mathrm{p}(r) = -\dfrac{\mathrm{G}m_1m_2}{r}$
Interaction coulombienne	$\vec{F} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$	$E_\mathrm{p} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$
Force de rappel d'un ressort fixé en O	$\vec{F} = -k(r-\ell_0)\,\vec{e}_r$	$E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$

- Interaction gravitationnelle : masses m_1 en O et m_2 en M.
- Interaction coulombienne : charges q_1 en O et q_2 en M.

L'énergie mécanique est une constante du mouvement :

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v^2(r,\theta) + E_\mathrm{p}(r)\,.$$

➤ Le mouvement de la particule est repéré par les coordonnées (r,θ).

L'énergie mécanique peut s'écrire en fonction de r et $\dot r$:

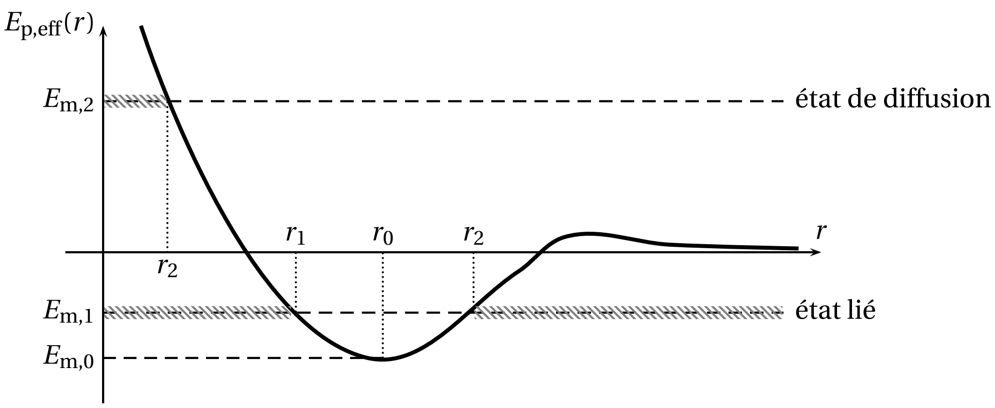
$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \dot r^2 + E_\mathrm{p,eff}(r) \quad \text{avec} \quad E_\mathrm{p,eff}(r) = E_\mathrm{p}(r) + \frac{mC^2}{r^2}\,,$$

où $E_\mathrm{p,eff}(r)$ est l'énergie potentielle effective.

➤ On a $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 = \dot r^2 + \dfrac{C^2}{r^2}$.

État lié, état de diffusion

La nature du mouvement dépend de la valeur de l'énergie mécanique : comme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\; r^2 \geqslant 0$, seules sont accessibles les valeurs de r telles que $E_\mathrm{p,eff}(r) \leqslant E_\mathrm{m}$.



État de diffusion : pour $E_\mathrm{m,2}$, on a $r \geqslant r_2$. Le mouvement n'est pas borné : $r \to \infty$.

État lié : pour $E_\mathrm{m,1}$, on a $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Le mouvement est borné.

➤ Le graphe précédent ne décrit que la composante **radiale** du mouvement : la particule tourne autour du centre de force avec la vitesse angulaire $\dot\theta = \dfrac{C}{r^2}$.

➤ Le cas $E_\mathrm{m,0}$ fixe $r = r_0$: le mouvement est circulaire uniforme, de rayon r_0.

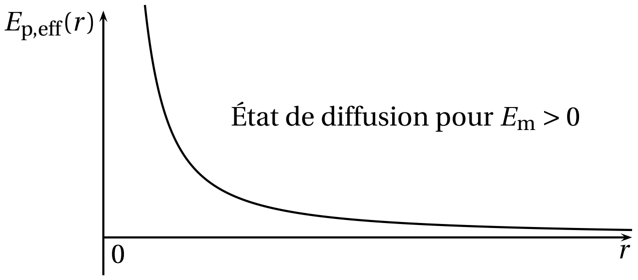
Cas particulier du champ newtonien

L'expression général d'un champ de force newtonien et de l'énergie potentielle dont il dérive est

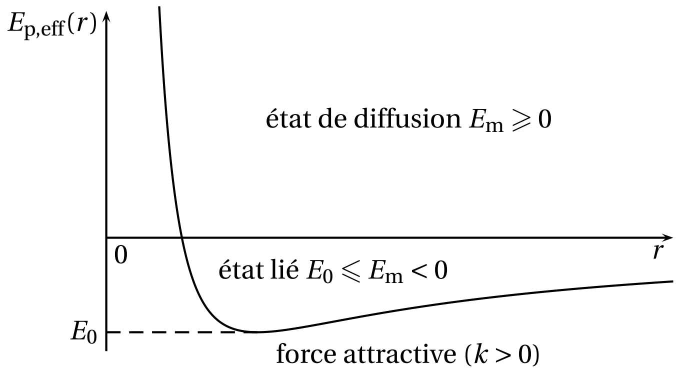
$$\vec F = \frac{k}{r^2}\,\vec e_r\,. \quad \text{et} \quad E_\mathrm{p}(r) = \frac{k}{r}\,.$$

➤ La force est attractive si $k < 0$ et répulsive si $k > 0$.

➤ L'interaction gravitationnelle et l'interaction coulombienne sont des forces newtoniennes.



force répulsive ($k > 0$)



force attractive ($k > 0$)

Lois de Kepler pour les planètes

1re loi : les planètes décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil est l'un des foyers.

2e loi (loi des aires) : les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales. Elles ne dépendent pas de la planète considérée.

3e loi : la période de révolution T de la planète est reliée au demi-grand axe a de son orbite elliptique selon

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

où K est une constante indépendante de la planète considérée.

➤ Les lois de Kepler s'appliquent à tout satellite autour d'une planète.

Démonstration de la 3e loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire

Soient M la masse du Soleil et m celle de la planète. En notant a le rayon de la trajectoire circulaire, le PFD projeté selon $\vec{e}_r$ donne $-m\frac{v^2}{a} = -\frac{\mathrm{G}Mm}{a^2}$. La vitesse est reliée à la période selon $v = \frac{2\pi a}{T}$. On en déduit $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}M}}$.

Énergie mécanique

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r_0, l'énergie mécanique du point matériel de masse m est

$$E_m = -\frac{\mathrm{G}Mm}{2r_0}.$$

Dans une cas d'une trajectoire elliptique de demi grand-axe a, elle s'écrit

$$E_m = -\frac{\mathrm{G}Mm}{2a}.$$

➤ On a $E_m < 0$: il s'agit bien d'un état lié.

Satellites terrestres

Satellite géostationnaire : satellite au repos dans le référentiel terrestre (fixe dans le ciel). Orbite circulaire, dans le plan de l'équateur terrestre, à une altitude de **36 000 km**. Météorologie, télévision par satellite.

Satellite en orbite basse : entre 500 km et 1000 km d'altitude. Télécommunication, imagerie terrestre, météorologie.

Satellite en orbite moyenne : entre 2000 km et 36 000 km d'altitude. Localisation terrestre (GPS).

Vitesses cosmiques

Première vitesse cosmique : vitesse permettant de mettre un satellite en orbite basse (altitude $h \ll R_\mathrm{p}$) autour d'une planète de rayon R_p et de masse M_p :

$$v_1 = \sqrt{\mathrm{G}M_\mathrm{p}}R_\mathrm{p}$$

Vitesse de libération : vitesse minimale à communiquer au satellite pour qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle de la planète :

$$v_\mathrm{lib} = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M_\mathrm{p}}{R_\mathrm{p}}}.$$

Pour la Terre : $v_\mathrm{lib} = 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

- La vitesse de libération est aussi appelée seconde vitesse cosmique.
- On a $v_\mathrm{lib} = \sqrt{2}v_1$.