Optique — Systèmes centrés dans l'approximation de Gauss : lentilles minces

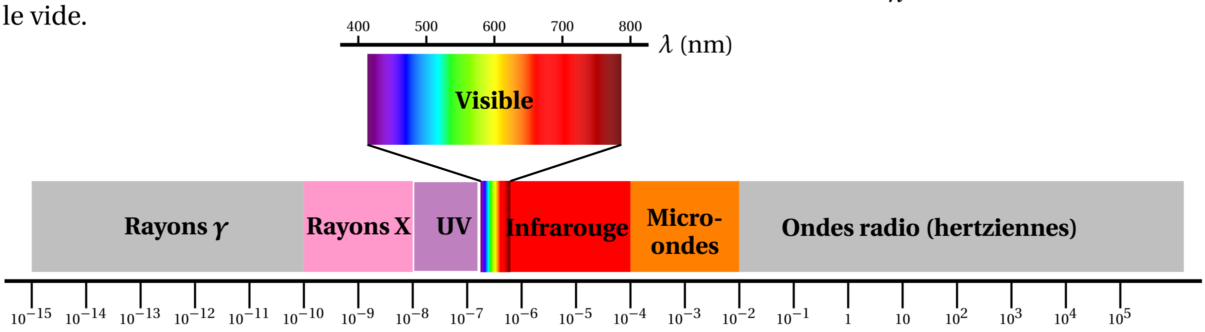
Onde lumineuse

L'indice de réfraction n d'un milieu transparent est défini par $n = \frac{c}{v}$ où v est la vitesse de la lumière dans le milieu et c sa vitesse dans le vide. C'est une grandeur sans dimension, avec $n \geqslant 1$.

Ordres de grandeur à connaître

vide : $n = 1$; air : $n = 1{,}0003 \approx 1$; eau : $n \approx 1{,}33$; verres : $1{,}2 < n < 1{,}8$.

La longueur d'onde d'une onde lumineuse dans un milieu d'indice n est $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, où λ_0 est sa longueur d'onde dans le vide.



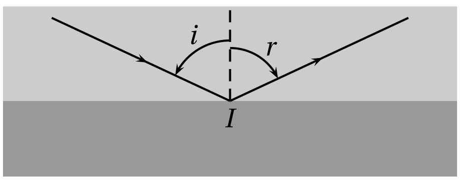
L'approximation de l'optique géométrique suppose que la longueur caractéristique des variations des propriétés physiques du milieu (indice n) est très supérieure à la longueur d'onde de la radiation.

Réflection et réfraction : lois de Descartes

Un **dioptre** est la surface de séparation de deux milieux d'indices optiques différents.
Étant donné un rayon incident sur un dioptre, le **plan d'incidence** est le plan formé par le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence.

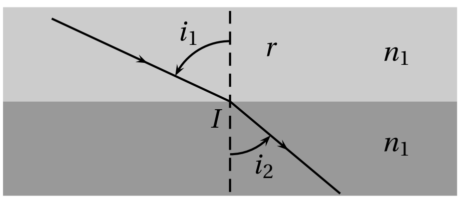
Réflexion

- Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence
- L'angle de réflexion est l'opposé de l'angle d'incidence : $r = -r$



Réfraction

- Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence
- Les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 vérifie $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

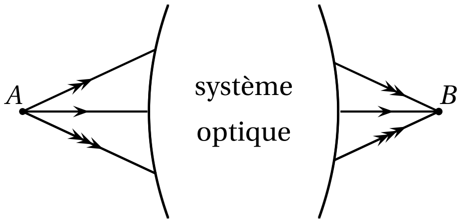


- Un rayon incident donne naissance à un rayon réfléchi et un rayon réfracté.
- Si $n_2 < n_1$, il n'y a pas de rayon réfracté si $i > i_{\text{lim}}$ tel que $\sin i_{\text{lim}} = n_2/n_1$; il y a alors **réflexion totale**.

Formation d'image : stigmatisme

Stigmatisme rigoureux

Soient deux points A et B, tels que tout rayon entrant dans le système optique et dont le support passe par A donne un rayon sortant du système optique, ayant un support passant par B. On dit alors que :
— B est l'**image** de A par le système optique ;
— les points A et B sont **conjugués** par le système optique ;
— le système optique est **rigoureusement stigmatique** pour les points A et B.



➤ Le seul système optique rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace est le miroir plan : l'image d'un point par un miroir plan est son symétrique par rapport au plan du miroir.

L'image B d'un point A par un miroir plan est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.

Stigmatisme approché : conditions de Gauss

*On ne considère que des **systèmes centrés**, admettant un axe de symétrie de révolution appelé **axe optique**.*
Les systèmes optiques centrés ne sont pas rigoureusement stigmatiques : tous les rayons issus d'un point A ne convergent pas en un même point B à la sortie du système ; on ne peut former d'image nette.

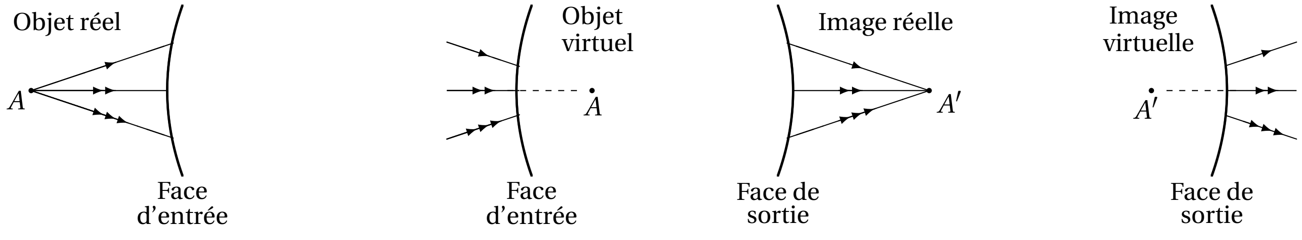
Dans les conditions de Gauss, on ne considère que les rayons **paraxiaux**, c'est-à-dire :
— qui font un angle faible avec l'axe optique ;
— qui traversent le système optique au voisinage de l'axe optique.

➤ Les rayons paraxiaux issus d'un point A ressortent du système en convergeant en un même point B ; on réalise alors un **stigmatisme approché**.
➤ Travailler avec un système centré dans les conditions de Gauss permet de **former des images nettes**.

Par la suite, on se placera systématiquement dans les conditions de Gauss.

Image, objet, foyers

Objet réel : situé avant la face d'entrée du système.
Objet virtuel : situé après la face d'entrée du système.
Image réelle : située après la face de sortie du système.
Image virtuelle : située avant la face de sortie du système.



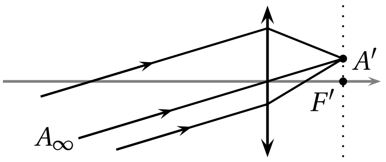
Un objet (ou une image) ponctuel **à l'infini, sur l'axe optique** correspond à un faisceau de rayons parallèles entre eux, et parallèles à l'axe optique.
Un objet (ou une image) ponctuel **à l'infini, hors de l'axe optique** correspond à un faisceau de rayons parallèles entre eux, inclinés par rapport à l'axe optique.

Le foyer image F' est le point conjugué d'un objet ponctuel à l'infini, sur l'axe optique.
Le foyer objet F est le point conjugué d'une image ponctuelle à l'infini, sur l'axe optique.

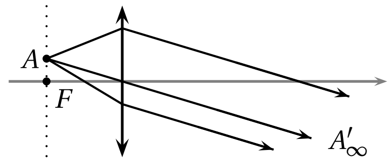
- Les foyers F et F' sont appelés foyers principaux.
- Les foyers F et F' sont sur l'axe optique.
- Les foyers F et F' ne sont pas conjugués entre eux!

Le plan focal image est le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F'.
Le plan focal objet est le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F.

- Le point conjugué d'un objet ponctuel à l'infini hors de l'axe optique est situé dans le plan focal image; c'est un foyer secondaire.
- Le point conjugué d'une image ponctuelle à l'infini hors de l'axe optique est situé dans le plan focal objet; c'est un foyer secondaire.



Objet à l'infini hors de l'axe



Un système dont les foyers sont à l'infini est dit **afocal**.

Lentilles sphériques minces

Une lentille sphérique mince est constituée de deux dioptres sphériques coaxiaux, de rayons de courbures (algébriques) R_1 et R_2, dont la distance e entre les sommets S_1 et S_2 est telle que $e \ll |R_1|$, $e \ll |R_2|$ et $e \ll |R_1 - R_2|$.
On peut alors confondre les sommets des deux dioptres avec le **centre** O de la lentille : $S_1 \approx S_2 \approx O$.

- Le centre O correspond à l'intersection entre la lentille et l'axe optique.

Les **distances focales** sont les grandeurs algébriques :
distance focale objet : $f = \overline{OF}$ **distance focale image :** $f' = \overline{OF'}$

- On a $\boxed{f' = -f}$.
- Pour une lentille convergente on a $f' > 0$ et pour une lentille divergente $f' < 0$.

Formules de conjugaison

Soit un point A sur l'axe optique et son image A' par une lentille sphérique mince de distance focale image f'.

- Le point A' conjugué de A par la lentille est situé sur l'axe optique.
- Les positions de deux points conjugués sur l'axe sont reliées par une **formule de conjugaison**.

Formule de Descartes (origine au centre) : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{f'}$

Formule de Newton (origine aux foyers) : $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = f f' = -f'^2$

Formules de grandissement

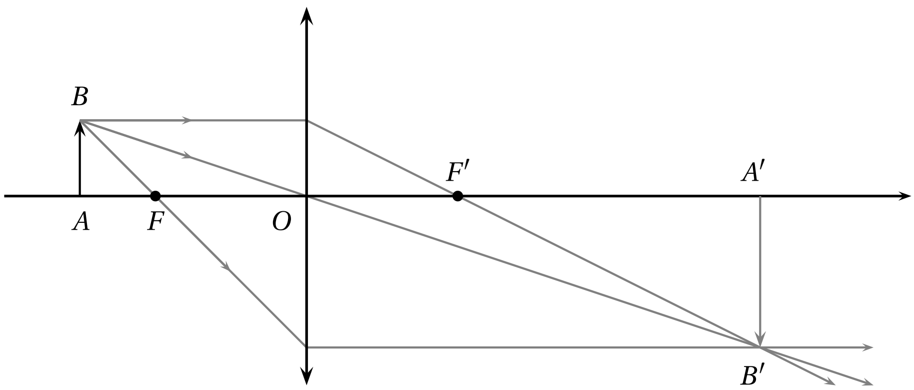
> Soit AB un objet perpendiculaire à l'axe optique. Son image $A'B'$ par une lentille mince est aussi perpendiculaire à l'axe optique.
>
> Le grandissement est la grandeur algébrique $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Le grandissement peut être déterminé à partir des positions de l'objet et de l'image sur l'axe optique par les **formules de grandissement** :

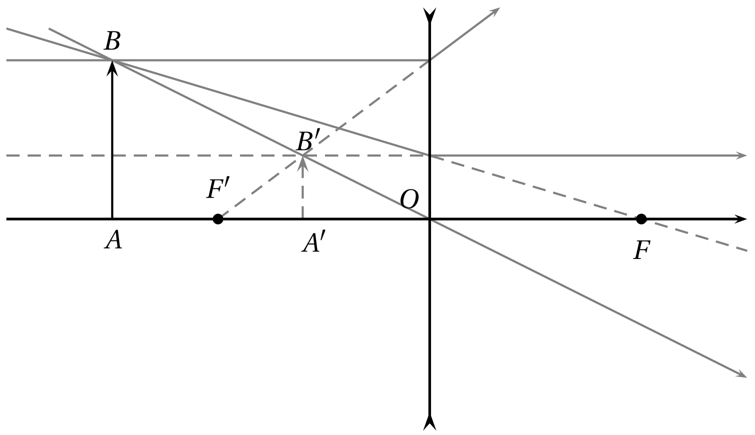
> avec origine au centre : $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; avec origine aux foyers : $\gamma = -\dfrac{f}{\overline{FA}} = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}$.

Construction des rayons

> **1.** Un rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié.
> **2.** Un rayon incident parallèle à l'axe optique ressort en passant par le foyer image F'.
> **3.** Un rayon issu du foyer objet F ressort parallèle à l'axe optique.



Construction géométrique pour une lentille convergente



Construction géométrique pour une lentille divergente

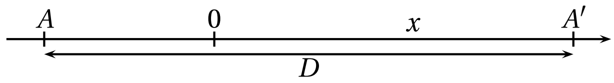
Ordres de grandeur à connaître sur l'œil

Limite de résolution angulaire	$1° = 3 \times 10^{-4}$ rad
plage d'accomodation	de 25 cm (*punctum proximum*) à $+\infty$ (*punctum remotum*)
bande passante	400 nm $< \lambda <$ 800 nm

Annexe : un calcul classique

> Soit D la distance entre un objet et un écran. On ne peut former l'image réelle de l'objet sur l'écran avec une une lentille convergente que si $D \gg f'$.

On considère un objet A dont on veut faire l'image A' à la distance $AA' = D$. On place une lentille convergente ($f' > 0$) en O, et on note $\overline{OA'} = x$.



L'image étant réelle, $\overline{OA'} = x > 0$. De plus $\overline{OA} = x - D < 0$.
Si A' est l'image de A par la lentille, la relation de conjugaison doit être vérifiée :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}}$$

soit

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{x-D}.$$

On multiplie chaque membre par le produit $x(x-D)f'$ des dénominateurs, ce qui conduit à $f'(x-D) = x(x-D) + xf'$, soit après simplification

$$x^2 - Dx + f'D = 0. \tag{1}$$

Dire « la lentille en O forme en A' l'image de A« revient à dire « l'équation (1) admet une solution », ce qui est le cas si $D^2 - 4f'D = D(D-4f') \geqslant 0$. Il faut donc $\boxed{D \geqslant 4f'}$.
L'équation (1) admet les deux racines

$$x_1 = \overline{OA'_1} = \frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D(D-4f')}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{OA'_2} = \frac{D}{2} + \frac{\sqrt{D(D-4f')}}{2}.$$

- On constate que les deux positions possibles de la lentille sont symétrique par rapport au milieu de AA'. Dans la position $x_1 < D/2$, la lentille est plus proche de l'objet que de l'écran, tandis que dans la position $x_2 > D/2$, la lentille est plus proche de l'écran que de l'objet.
- On en déduit $\overline{OA_1} = x_1 - D$ et $\overline{OA_2} = x_2 - D$, soit

$$\overline{OA_1} = -\frac{D}{2} + \frac{\sqrt{D(D-4f')}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{OA_2} = -\frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D(D-4f')}}{2}.$$

- Les grandissements correspondants sont donnés par

$$\gamma_1 = \frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}} = -\frac{D+\sqrt{D(D-4f')}}{D-\sqrt{D(D-4f')}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{OA'_2}}{\overline{OA_2}} = -\frac{D-\sqrt{D(D-4f')}}{D+\sqrt{D(D-4f')}}.$$

  On a $\gamma_1 < 0$ et $\gamma_2 < 0$: l'image est inversée, comme attendu lors de la projection d'un objet avec une lentille convergente.
  On remarque que $\gamma_1\gamma_2 = 1$: les deux positions correspondent à des grandissements inverses l'un de l'autre.
  On a $|\gamma_1| > 1$: la position telle que la lentille est plus proche de l'objet que de l'écran donne une image agrandie.
  On a $|\gamma_2| < 1$: la position telle que la lentille est plus proche de l'écran que de l'objet donne une image réduite.
- Le « montage $4f'$ » correspond au cas particulier $D = 4f'$. L'équation (1) n'admet qu'une solution $x = -D/2$: la lentille est à égale distance de l'objet et de l'écran. Le grandissement vaut alors $\gamma = -1$.

Application à la focométrie

La focométrie est la détermination expérimentale de la focale f' d'une lentille.

Méthode de Bessel La distance D étant fixée, on déplace la lentille et on note x_1 et x_2 donnant une image nette sur l'écran. Ces deux positions sont distantes de $d = x_2 - x_1 = \sqrt{D(D-4f')}$ d'où l'on déduit $f' = \dfrac{D^2 - 4d^2}{4D}$.

Méthode de Silbermann On procède par tâtonnement, en cherchant la distance D et la position de la lentille telle que l'image est inversée, de même taille que l'objet. On est alors dans le cas du montage $4f'$, et $f' = D/4$.