

TD d'électromagnétisme n° 3 — Équations locales — solution

1 — Jonction P-N

- On rencontre des jonctions PN dans les diodes et les transistors.
- L'ensemble étant neutre, la charge totale d'une section S (perpendiculaire à Ox) est donc

$$\rho_2 b S + \rho_1 a S = 0$$

d'où

$$\rho_1 a + \rho_2 b = 0.$$

- Les plans $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ étant des plans de symétrie de la distribution de charge, le champ \vec{E} est porté par vox . La distribution étant invariante par translation selon Oy et Oz , on a donc

$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{e}_x.$$

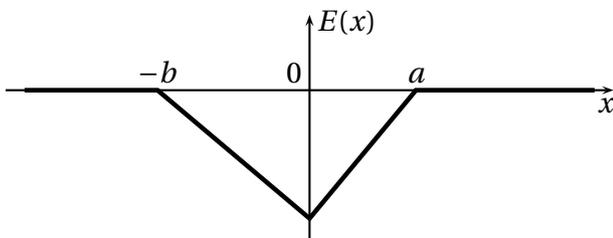
L'équation de Maxwell-Gauss dans le milieu s'écrit alors, comme $\text{div} \vec{E} = \frac{dE}{dx}$:

$$\frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_2}{\epsilon_0} & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0} & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

On en déduit par intégration, sachant que $E(-b) = 0$ et $E(a) = 0$ (le champ est nul à l'extérieur et il est continu)

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho_2}{\epsilon_0}(x+b) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0}(x-a) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

On a $E(0) = \frac{\rho_2 b}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_1 a}{\epsilon_0}$.



- De $\vec{E} = -\text{grad} V$ on déduit $\frac{dV}{dx} = -E(x)$, soit

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq -b \\ -\frac{\rho_2}{\epsilon_0}(x+b) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}(x-a) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

On intègre sachant que $V(0) = 0$, d'où

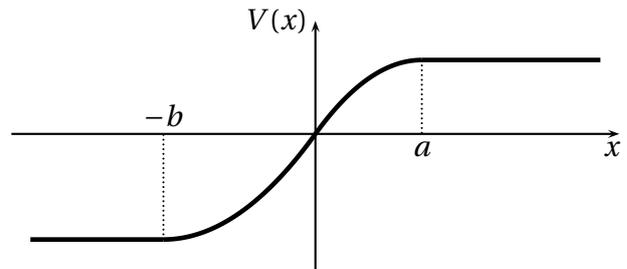
$$V(x) = \begin{cases} C_1 & \text{pour } x \leq -b \\ -\frac{\rho_2}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{2} + bx \right) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ C_2 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

Par continuité du potentiel en $x = -b$ on obtient

$$C_1 = \frac{\rho_2 b^2}{2\epsilon_0} < 0.$$

Par continuité du potentiel en $x = a$ on obtient

$$C_2 = \frac{\rho_1 a^2}{2\epsilon_0} > 0.$$



2 — Distribution de charges

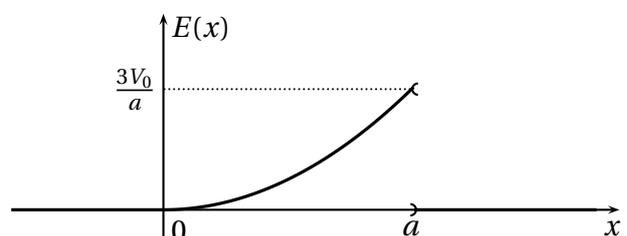
- Le champ électrostatique est donné par

$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x > a \\ \frac{3V_0}{a^3} x^2 \vec{e}_x & \text{pour } 0 < x < a \\ \vec{0} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Représentons sa composante $E(x)$:



2. La densité volumique de charge est donnée soit part l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

soit

$$\rho(x) = -\epsilon_0 \frac{d^2 V}{dx^2}.$$

On calcule

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x > a \\ \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^3} x & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Considérons un cylindre d'axe Oz , de section S , englobant la zone $[0, a]$ (ses extrémités ont pour cotes $x_1 < 0$ et $x_2 > a$). Le champ \vec{E} étant nul au niveau des extrémités de ce cylindre, le théorème de Gauss s'écrit

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

On a donc $Q_{\text{int}} = 0$.

La charge totale portée due à la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans ce cylindre vaut

$$Q_{\text{vol}} = \int_0^a \rho(x) S dx = \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^3} \int_0^a S x dx = \frac{3\epsilon_0 V_0}{a} S.$$

La charge totale contenue dans le cylindre étant nulle, la distribution de charge ne peut être uniquement décrite par une répartition volumique de charges.

Il existe donc une distribution surfacique, de densité surfacique σ , située en $x = a$, où on observe une discontinuité du champ électrostatique. La charge surfacique comprise dans le cylindre est $Q_{\text{surf}} = \sigma S$.

Comme $Q_{\text{int}} = Q_{\text{vol}} + Q_{\text{surf}} = 0$, on a $\sigma S = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{a} S$, d'où

$$\sigma = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{a}.$$

3. Comme on l'a vu, la distribution est **globalement neutre**.

4 — Écrantage de Debye

1. La densité volumique de charges dans le milieu est

$$\rho(r) = n^+(r)q - n^-(r)q = n_0 q \left[e^{-\frac{qV}{k_B T}} - e^{\frac{qV}{k_B T}} \right]$$

$$\rho(r) = -2n_0 q \sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right).$$

L'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Le potentiel $V(r)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\Delta V = \frac{2n_0 q}{\epsilon_0} \sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right).$$

2. Pour $qV \ll k_B T$, on a

$$\sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right) \approx \frac{qV}{k_B T},$$

d'où en utilisant l'expression du laplacien fournie

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2 V(r)}{\epsilon_0 k_B T},$$

soit

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} rV(r).$$

On peut écrire

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{1}{\ell_D^2} rV(r) \quad \text{avec} \quad \ell_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 q^2}}.$$

La solution générale est de la forme

$$rV(r) = A_1 e^{\frac{r}{\ell_D}} + A_2 e^{-\frac{r}{\ell_D}},$$

soit

$$V(r) = \frac{A_1}{r} e^{\frac{r}{\ell_D}} + \frac{A_2}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Le potentiel $V(r)$ ne pouvant diverger pour $r \rightarrow \infty$, on a nécessairement $A_1 = 0$, et

$$V(r) = \frac{A_2}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Considérer $r \rightarrow 0$ revient à se rapprocher de la charge q en 0; le potentiel créé par cette charge prédomine alors sur le potentiel créés par les autres charges; comme $e^{-\frac{r}{\ell_D}} \approx 1$, on a alors

$$V(r) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \approx \frac{A_2}{r}.$$

On en déduit $A_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ et le potentiel s'écrit finalement

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

3. Le potentiel coulombien créé par la charge $+q$ seule est

$$V_{\text{Coul}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Le potentiel au voisinage de cette charge dans le plasma s'écrit

$$V(r) = V_{\text{Coul}}(r) e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Cette expression fait apparaître le terme d'écrantage $e^{-\frac{r}{\ell_D}} < 1$, qui devient très faible dès que $r \gg \ell_D$. Les charges négatives du plasma sont attirées autour de la charge $+q$, et font « écran », diminuant le potentiel créé.

- Cela peut surprendre d'obtenir un potentiel qui fait apparaître un rôle central à la charge $+q$ choisie au hasard dans le plasma. En fait, c'est un phénomène statistique, en moyenne dans le temps; le plasma présente une certaine dynamique, due à l'agitation thermique, et les charges ne sont pas figées dans l'espace.
- L'agitation thermique s'oppose au regroupement des charges $-q$ autour de la charge $+q$, donc à l'écrantage. En effet, le phénomène est moins important (ℓ_D est plus grand) quand T augmente.

5 — Champ disruptif de l'air

1. La différence de potentiel δV entre deux équipotentielles successives et la même sur le graphique.

Comme $E \approx \frac{\delta V}{d\ell}$ où $d\ell$ est la distance entre deux équipotentielles, le champ est maximum là où les équipotentielles sont le plus rapprochées, c'est-à-dire au voisinage des électrodes.

On voit de plus que la pente $\frac{dV}{dz}$ est maximum en $x = \pm 1$ sur le graphe $V(z)$.

2. On estime la pente de $V(z)$ en $z = 0$, soit

$$\frac{dV}{dz} \approx \frac{0,25}{0,4 \times 10^{-3} - (-0,4 \times 10^{-3})} = 3,1 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On a donc en intensité $E(0) = 3,1 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, pour une différence de potentiel entre les électrodes $\Delta V = 2 \text{ V}$.

La relation entre E et V étant linéaire, pour obtenir E_{dis} , il faut appliquer ΔV_{dis} telle que

$$\Delta V_{\text{dis}} = \Delta V \frac{E_{\text{dis}}}{E(0)}$$

soit $\Delta V_{\text{dis}} = 2,3 \times 10^4 \text{ V}$.

Le champ disruptif de l'air est $E_{\text{dis}} = 3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle tension doit-on appliquer aux bornes des électrodes pour atteindre ce champ au centre O du dispositif?

9 — Matière noire

1. Théorème de Gauss pour la gravitation :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

Pour $r < R$, on a $M_{\text{int}} = M_g \frac{r^3}{R^3}$, donc

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_g \frac{r^3}{R^3}$$

d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{GM_g}{R^3} r.$$

Pour $r \geq R$, on a $M_{\text{int}} = M_g$, donc $4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_g$, d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{GM_g}{r^2}.$$

2. On écrit le PFD appliqué à l'étoile pour un mouvement circulaire uniforme :

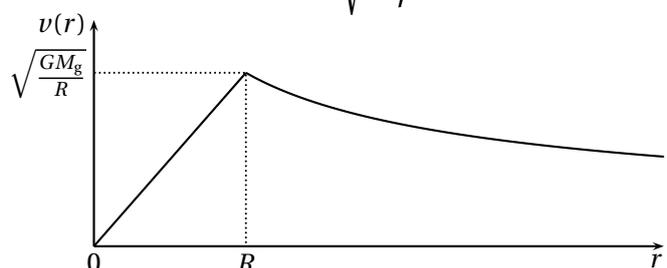
$$-m \frac{v^2(r)}{r} \vec{e}_r = -m \mathcal{G}(r) \vec{e}_r.$$

Pour $r < R$, on obtient $\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM_g}{R^3} r$, d'où

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_g}{R^3}} r.$$

Pour $r \geq R$, on obtient $\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM_g}{r^2}$, d'où

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_g}{r}}.$$



Le profil de vitesse est cohérent avec les mesures pour $r < R$, c'est-à-dire dans le noyau, mais n'est pas compatible avec les données mesurées pour $r > R$: on obtient un profil $v(r)$ décroissant tandis que le profil réel est quasi constant. La répartition de masse proposée est donc à revoir.

3. On part de l'équation de Maxwell-Gauss pour la gravitation par analogie avec $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, soit

$$\text{div } \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G \rho_d(r).$$

Compte tenu de la symétrie sphérique, on a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -4\pi G \rho_d(r).$$

On détermine la forme que doit prendre le champ gravitationnel dans la zone de matière noire pour avoir une vitesse uniforme à partir du PFD :

$$-\frac{m v_0^2}{r} = m \mathcal{G}(r)$$

soit $\mathcal{G}(r) = -\frac{v_0^2}{r}$. On a alors

$$\text{div } \vec{\mathcal{G}} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d(r v_0^2)}{dr} = -\frac{v_0^2}{r} = -4\pi G \rho_d(r),$$

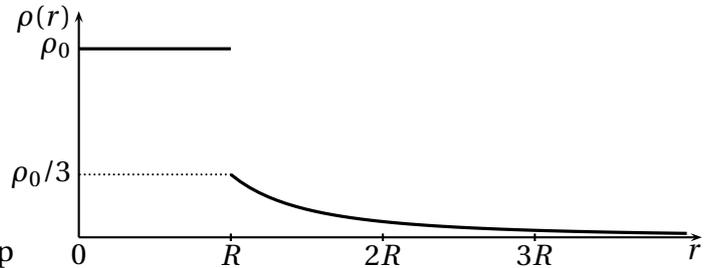
d'où

$$\rho_d(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}.$$

Avec $v_0^2 = \frac{GM_g}{R}$ on obtient $\rho_d(r) = \frac{M_g}{4\pi R r^2}$.

Comme $M_g = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3$, on a finalement

$$\rho_d = \rho_0 \frac{R^2}{3r^2}.$$



4. On a

$$M_{\text{noire}} = \int_R^{nR} 4\pi r^2 \rho_d(r) dr = 4\pi \int_R^{nR} \frac{\rho_0 R^2}{3} dr = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 (n-1).$$

Avec $M_g = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3$, on en déduit $\gamma = \frac{n-1}{n}$

Pour $n = 10$, on obtient $\gamma = 0,9$: **la matière noire représente 90 % de la masse de la galaxie.**