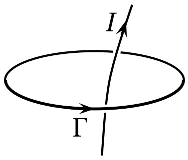
Théorème d'Ampère

Étant donné un contour orienté Γ :

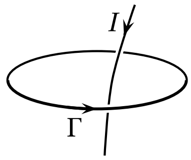
$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad \text{avec} \quad I_{\text{enlacé}} = \iint_{P\in\Sigma} \vec{j}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P\,,$$

où Σ est une surface orientée s'appuyant sur Γ.

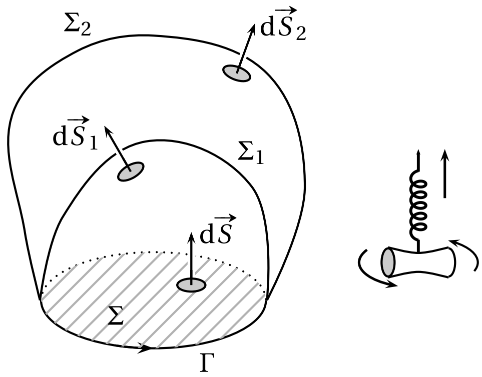
- Les orientations de Γ et de Σ sont liées par la règle d'orientation de Maxwell représentée ci-contre.
- L'orientation du contour détermine le signe de $I_{\text{enlacé}}$.



$I_{\text{enlacé}} = I$



$I_{\text{enlacé}} = -I$



Applications

Champ créé par un fil infini

On considère un fil rectiligne infini d'axe Oz parcouru par un courant d'intensité I, orienté selon $\vec{e}_z$.

- La distribution étant à symétrie cylindrique $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.
- En choisissant comme contour d'Ampère un cercle d'axe Oz, de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$:

$$\oint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r) \quad \text{et} \quad I_{\text{enlacé}} = I \quad \forall r > 0\,.$$

- Le théorème d'Ampère s'écrit alors $2\pi r B(r) = \mu_0 I$.

Le champ magnétostatique créé par un fil infini selon l'axe Oz, parcouru par un courant d'intensité I est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta\,.$$

Champ créé par un câble rectiligne infini

On considère un câble rectiligne infini d'axe Oz, de rayon a, parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti avec une densité volumique uniforme $\vec{j} = j\vec{e}_z$, soit $I = j\pi a^2$. L'étude est menée en coordonnées cylindriques. La distribution étant à symétrie cylindrique, on a $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.

- Le long d'un cercle de rayon r orienté selon $\vec{e}_\theta$, on a $\oint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r)$
- Le courant enlacé est

$$I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} j\pi r^2 = I r^2/a^2 & \text{pour } r < a \\ j\pi a^2 = I & \text{pour } r > a \end{cases}$$

On en déduit

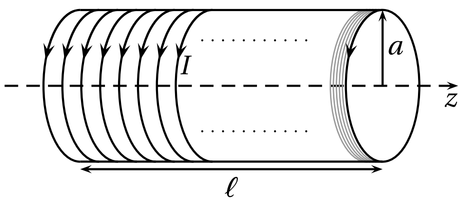
$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{e}_\theta & \text{pour } r < a \\[2ex] \dfrac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & \text{pour } r \geqslant a \end{cases}$$

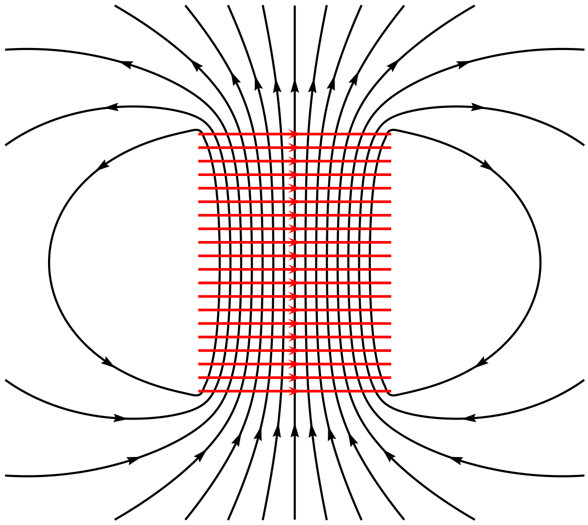
Solénoïde long sans effet de bords

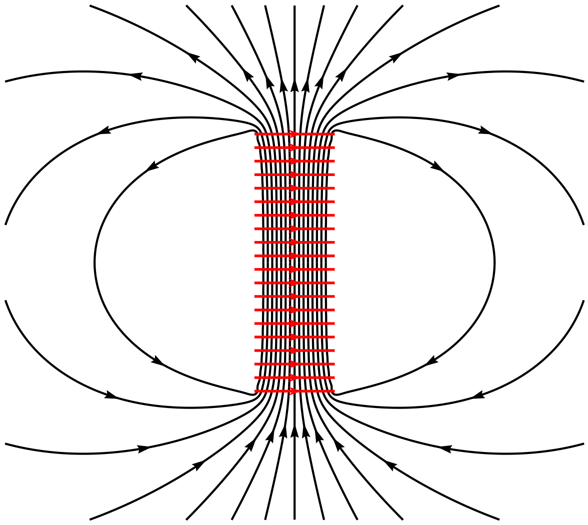
On considère un solénoïde de longueur ℓ, constitué de N spires circulaires de rayon a, de section $S = \pi a^2$. On note $n = N/\ell$ le nombre de spires par unité de longueur.

En négligeant les effets de bords (cas où $\ell/a \gg 1$), le champ magnétostatique créé est

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 n I \vec{e}_z & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur (admis)} \end{cases}$$







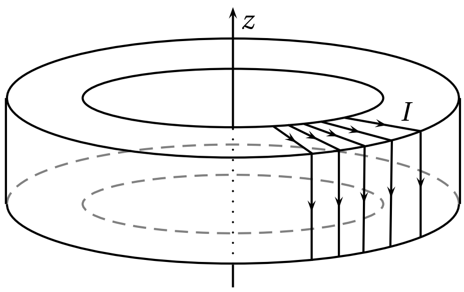
On observe sur les cartes de champ ci-dessus que :

— le champ intérieur tend à être uniforme quand $a \ll \ell$;

— le champ extérieur est négligeable (les lignes de champ, très resserrées à l'intérieur, sont très espacées à l'extérieur). Le champ extérieur tend bien à être nul quand $\ell \gg a$.

Bobine torique

Une bobine torique est constitué par l'enroulement d'un fil conducteur autour d'un tore d'axe Oz, de section S (usuellement circulaire, ou rectangulaire comme sur la figure), formant N spires.



En coordonnées cylindriques d'axe Oz, le champ magnétique est donné par

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{à l'intérieur du tore} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du tore} \end{cases}$$

Équations locales de la magnétostatique

Équation de Maxwell-Ampère

Le champ magnétostatique est relié à ses sources selon l'équation locale

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)\,.$$

➤ Cette équation est linéaire, ce qui justifie l'utilisation du principe de superposition.

Équation de Maxwell-Thomson

Le champ magnétostatique vérifie l'équation locale

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(M) = 0\,.$$

Conservation du flux magnétique

Le champ magnétique est à flux conservatif :

$$\oiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{B}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M = 0\,,\ \ \forall\,\Sigma\,.$$

- ➤ Le flux du champ magnétique se conserve à travers toute section d'un tube de champ.
- ➤ Par conséquent, l'intensité du champ magnétique le long d'un tube de champ augmente quand les lignes de champ se resserrent.
- ➤ Étant donné un contour Γ, le flux de $\overrightarrow{B}$ est le même à travers toute surface s'appuyant sur ce contour. On peut donc définir *le* flux de $\overrightarrow{B}$ à travers le contour Γ (*cf.* le cours sur l'induction).
- ➤ **Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées.** Il n'existe pas de monopôle magnétique, *i.e.* de point à partir duquel divergerait — ou vers lequel convergerait — le champ magnétique.

Propriétés topographiques

Les sources du champ magnétostatique sont les courants : distribution volumique de courants, ou conducteurs filiformes parcourus par des courants d'intensités I_n.

Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées qui entourent les sources.

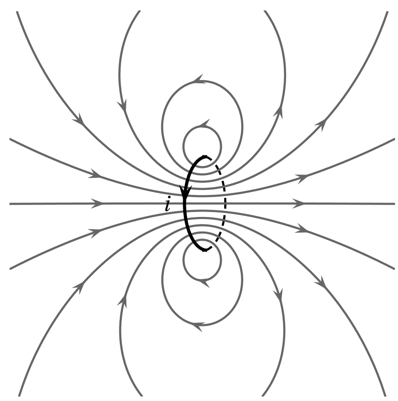
Dans le cas d'un conducteur filiforme, le sens du champ magnétique se déduit de la règle d'orientation de Maxwell.

On retiendra l'allure du champ magnétique créé par une spire :

— le plan de la spire est un plan de symétrie des courants : les lignes de champ y sont perpendiculaires ;

— les lignes de champ « tournent » autour du fil de la spire dans le sens indiqué ;

— les plans contenant l'axe de la spire sont des plans d'antisymétrie : les lignes de champ sont contenues dans ces plans, et l'axe est une ligne de champ.



Forces de Laplace

Un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ d'un conducteur filiforme parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est soumis à la force de Laplace $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}} = I\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\wedge\overrightarrow{B}}$, où le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur unitaire tangent au fil, orienté dans le sens de I.

Dans le cas d'un conducteur siège de courants de densité volumique $\overrightarrow{\jmath}$ placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, un volume $\mathrm{d}\tau$ est soumis à la force de Laplace $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}} = \overrightarrow{\jmath}\wedge\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}\tau}$.

- ➤ Le terme $\overrightarrow{f}_{\mathrm{L}} = \overrightarrow{\jmath}\wedge\overrightarrow{B}$ représente la force de Laplace volumique.