TD d'électromagnétisme n° 5 Le champ magnétostatique

1 — Courant inhomogène dans un cylindre

On considère un câble cylindrique de rayon R, d'axe Oz, de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble, selon la densité volumique de courant

$$\vec{j}(M) = J_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z.$$

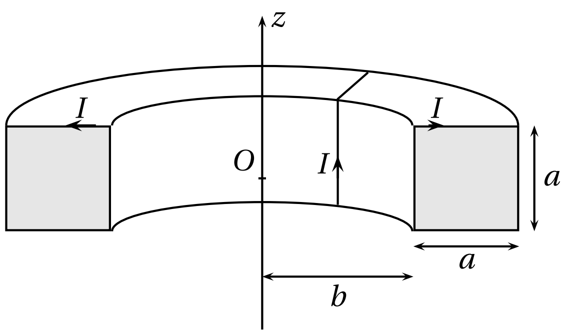
1. Exprimer J_0 en fonction de I.

2. Déterminer l'expression du champ magnétique créé par ce câble en tout point de l'espace. On donnera son expression en fonction de I, R, μ_0 et r.

Commenter l'expression du champ à l'extérieur du câble.

2 — Solénoïde torique

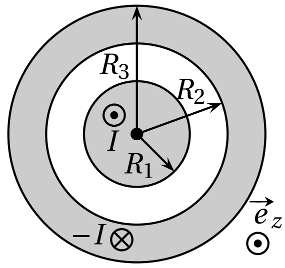
On considère un solénoïde torique de rayon intérieur b, comportant N spires parcourues par un courant d'intensité I. Sa section carrée, de coté a, est comprise entre les cotes $z=-a/2$ et $z=a/2$.



Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en tout point M de l'espace.

3 — Câble coaxial

On considère un câble coaxial constitué d'un cylindre métallique central de rayon R_1, et d'une couche cylindrique périphérique de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3.



Entre R_1 et R_2 se trouve une matière isolante ayant des propriété électromagnétique assimilables à celles du vide. Ce câble, d'axe Oz, est infiniment long. Sa partie conductrice centrale est parcourue par une intensité I constante, dirigée selon $\vec{e}_z$; sa partie périphérique est parcourue par l'intensité $-I$ selon $\vec{e}_z$.
Dans chacune des deux parties conductrices, la densité volumique de courant est supposée uniforme.

1. Montrer que le champ magnétique créé par ce câble se met sous la forme

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur à préciser (on se placera en coordonnées cylindriques).

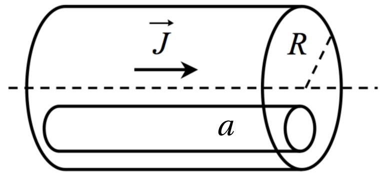
2. Établir l'expression de $B(r)$ pour $0 \leqslant r < +\infty$. Tracer $B(r)$.

4 — Cylindre avec cavité

1. On considère un cylindre de rayon a, d'axe Oz, parcouru par un courant uniforme $\vec{j} = j\,\vec{e}_z$.

Exprimer le champ magnétostatique *à l'intérieur du cylindre* en fonction de vecteur $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM}$.

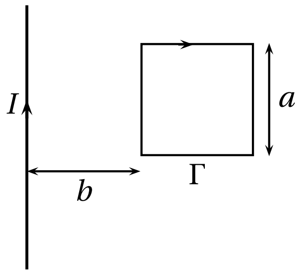
2. Un cylindre infini de rayon R comporte une cavité cylindrique de rayon a. Il est parcouru par une densité de courant volumique $\vec{J}$ uniforme



Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de la cavité.

5 — Flux à travers un cadre

Un fil rectiligne infini est parcouru par un courant d'intensité I.



Un cadre Γ carré, de côté a, est placé à la distance b du fil, ce dernier étant dans le plan du cadre.
Déterminer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le fil à travers le cadre Γ.

6 — Solénoïde épais

On considère une distribution statique de courants telle que, en coordonnées cylindriques, on a $\vec{j} = j_0\,\vec{e}_\theta$ pour $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ et $\vec{j} = \vec{0}$ pour $r > R_2$ ou $0 \leqslant r < R_1$. Ce solénoïde a une longueur L très grande devant R_2.

1. Déterminer le champ magnétique dans chaque domaine.

2. Le matériau possède une conductivité électrique γ uniforme. Établir l'expression de la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ dissipée par effet Joule dans le solénoïde.

3. En notant B_0 le champ magnétique sur l'axe, exprimer $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ en fonction de B_0, μ_0, γ et des dimensions du solénoïde.

4. B_0, L et R_2 étant fixés, comment faut-il choisir R_1 pour minimiser la puissance dissipée ?

5. Le solénoïde a pour longueur $L = 1$ m, et délivre un champ $B_0 = 1{,}3$ T. Calculer la borne inférieure de la puissance dissipée. Comparer à la puissance d'un radiateur électrique ordinaire.
On donne $\gamma = 6 \times 10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$.

7 — Cylindre en rotation uniformément chargé en volume

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R, uniformément chargé en volume avec la densité volumique de charges $\rho > 0$. Ce cylindre est mis en rotation autour de son axe avec la vitesse angulaire constante ω.

1. Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ de cette distribution.

2. Déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.

8 — Nappe de courant

On considère une couche d'épaisseur e, infiniment étendue selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$, parcourue par une distribution volumique de courant $\vec{j} = j\,\vec{e}_z$ uniforme. Le reste de l'espace est assimilé au vide.

1. Déterminer la forme du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

2. À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

3. Tracer le graphe de la composante $B_x(y)$.

4. Que se passe-t-il si l'on considère le cas limite où $e \to 0$, en maintenant le produit $j\,e$ inchangé ?

9 — Supra conducteur

On dispose d'un matériau supraconducteur dans le demi-espace $x > 0$, placé dans un champ extérieur $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$ permanent.
On admet qu'il y a invariance par translation selon y et z et que $B_y = 0$ dans tout l'espace.
Dans le supraconducteur, $\vec{j}$ et $\vec{B}$ vérifient l'équation de London

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0\lambda^2}.$$

1. Déterminer l'équation vérifiée par $\vec{B}$. La résoudre. Donner une interprétation de λ.

2. Déterminer la densité volumique de courant.

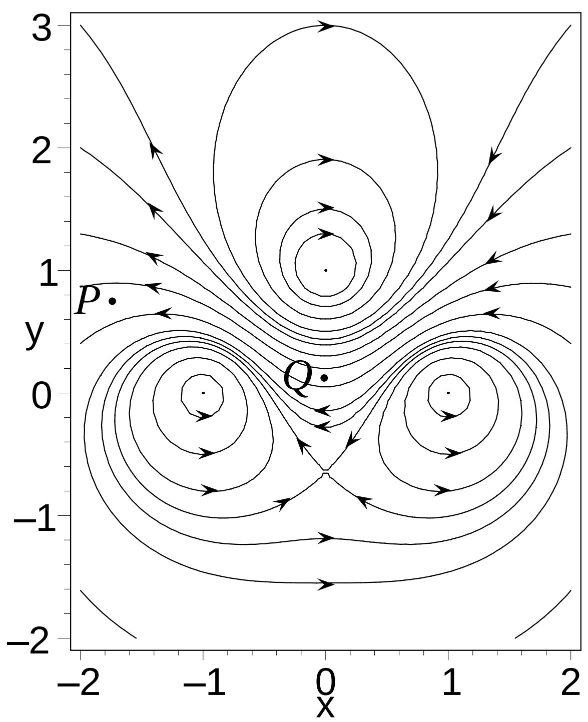
3. En calculant la force exercée par le champ sur les charges du supraconducteur, déterminer la pression magnétique appliquée au supraconducteur.

On donne la formule d'analyse vectorielle

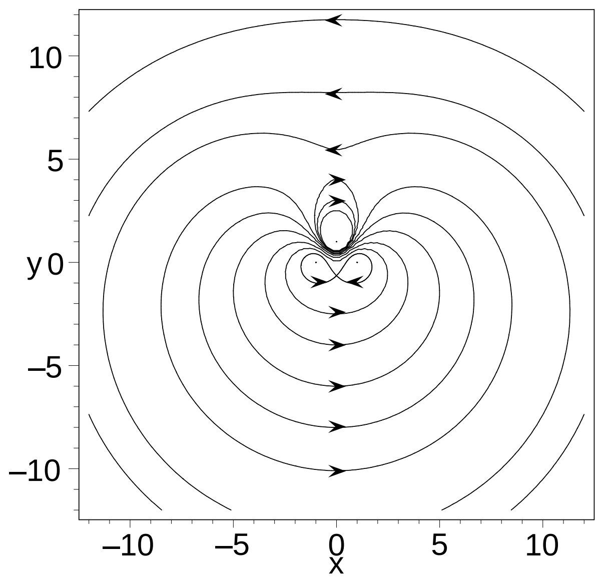
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}.$$

10 — Trois fils

On représente la carte du champ magnétique créé par trois fils rectilignes infinis parallèles, parcourus par des courants d'intensité I_1, I_2 et I_3.



À plus grande distance :

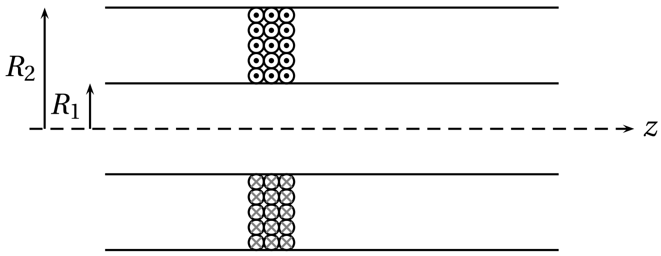


Déterminer les positions des fils.
Y-a-t-il un point de champ nul ?
Donner le plus d'information sur les intensités I_1, I_2 et I_3.
Le champ magnétique au point P vaut 0,2 T. Évaluer sa valeur au point Q.

11 — Solénoïde épais

On considère un solénoïde infini d'axe de révolution $(z'z)$. Les spires sont supposées jointives, avec n spires par unité de longueur suivant l'axe et m spires par unité de longueur suivant (OM) où M est un point de l'espace et O son projeté orthogonal suivant $(z'z)$.

Les spires sont parcourues par un courant d'intensité I.

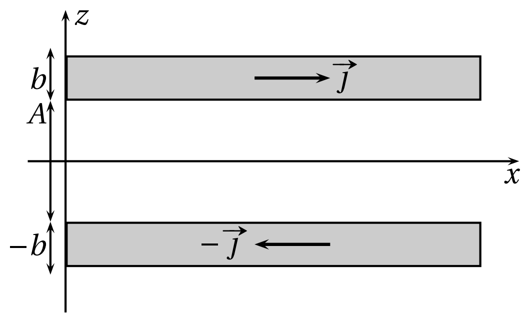


1. Par l'étude des symétries et invariances, caractériser le champ $\overrightarrow{B}(M)$.

2. Déterminer l'expression complète de $\overrightarrow{B}(M)$.

12 — Deux nappes épaisses

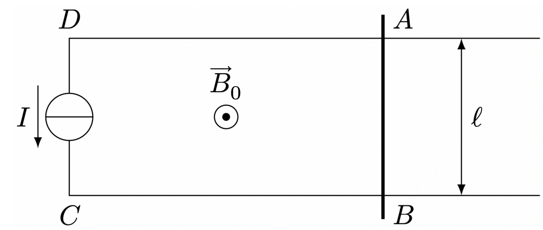
On considère deux plaques conductrices parallèles parcourues par des courants volumiques opposés.
On suppose le champ magnétique extérieur nul.



Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace et tracer le graphe de sa composante en fonction de z.

13 — Rail gun

On considère le circuit électrique plan ci-dessous, dans lequel le conducteur AB peut glisser sans frottement et sans que le contact électrique soit rompu, sur les conducteurs DA et BC. On considère que l'essentiel de la résistance électrique est concentrée sur les contacts A et B. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_0$ normal au plan du circuit. On désigne par ℓ la distance entre les rails.



1. Le circuit est alimenté par une source de courant stationnaire I. Déterminer la valeur de B_0 pour que l'on puisse accélérer la masse jusqu'à une vitesse $v = 2{,}4 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sur une distance $d = 3\ \mathrm{m}$ si on peut produire un courant de $I = 1 \times 10^3\ \mathrm{A}$. Commenter.

2. On dispose désormais d'un courant d'intensité de l'ordre de $I = 1 \times 10^6\ \mathrm{A}$. Montrer que l'on peut atteindre une vitesse v du même ordre sur la même distance d sans utiliser de champ magnétique externe.

Données numériques
masse du conducteur $m = 500\ \mathrm{g}$
longueur entre les rails $\ell = 10\ \mathrm{cm}$
rayon des conducteurs $r = 3\ \mathrm{mm}$

14 — Champ magnétique au voisinage de l'axe d'une spire

On considère une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz parcourue par un courant I.

1. Montrer que le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_0(z)\,\vec{u}_z\,.$$

Discuter de la parité de $B_0(z)$.

On cherche maintenant à exprimer le champ magnétique en un point M' au voisinage de l'axe Oz, c'est-à-dire avec $r \ll R$ et $r \neq 0$.

2. Montrer que le champ magnétique créé en M' s'écrit

$$\vec{B}(M') = B_r(r,z)\,\vec{u}_r + B_z(r,z)\,\vec{u}_z\,.$$

3. En exprimant le flux de $\vec{B}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon $r \ll R$ et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que, lorsque $\mathrm{d}z \to 0$, on a

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_0(z)}{\mathrm{d}z}\,.$$

4. En exprimant la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour rectangulaire passant par $M'(r,z,\theta)$ de hauteur $\mathrm{d}z$ et de largeur $\mathrm{d}r$, lorsque $\mathrm{d}z \to 0$ et $\mathrm{d}r \to 0$, montrer que

$$B_z' r,z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2 B_0(z)}{\mathrm{d}z^2}\,.$$