

TD d'électromagnétisme n° 5

Le champ magnétostatique

2 — Solénoïde torique

Choisissons un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz . Le champ magnétique s'écrit *a priori* :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

La distribution de courant étant invariante par rotation d'axe Oz , les composantes du champ ne dépendent pas de θ :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

Pour tout point M , le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $B_r = B_z = 0$. Finalement :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

Nous pouvons appliquer le théorème d'Ampère en choisissant comme contour un cercle Γ de rayon r , de centre $C \in Oz$. En l'orientant selon \vec{e}_θ , la circulation du champ magnétique s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r, z)$$

Nous pouvons calculer l'intensité du courant enlacé en déterminant l'intensité traversant le disque orienté selon \vec{e}_z s'appuyant sur Γ ; il faut envisager plusieurs cas :

- $z > a/2$: le tore ne traverse pas le disque ; on a donc $I_{\text{enlacé}} = 0$, d'où $B(r, z) = 0$;
- $z < -a/2$: on a de même $I_{\text{enlacé}} = 0$, d'où $B(r, z) = 0$;
- $-a/2 < z < a/2$:

il faut étudier trois cas.

$r < b$: on a $I_{\text{enlacé}} = 0$, d'où $B(r, z) = 0$;

$b < r < b + a$: le disque est traversé N fois par le courant I , dans le sens de \vec{e}_z ; on a donc $I_{\text{enlacé}} = NI$. Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$2\pi r B(r, z) = \mu_0 NI$$

d'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

$r > b + a$: le disque est traversé N fois par le courant I dans le sens \vec{e}_z , et N fois dans le sens $-\vec{e}_z$; on a donc $I_{\text{enlacé}} = 0$ et $B(r, z) = 0$.

Finalement :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{à l'intérieur du tore} \\ 0 & \text{à l'extérieur du tore} \end{cases}$$

3 — Câble coaxial

1. Les symétries et invariances sont les mêmes que pour le câble infini vu en cours. Les reprendre, on arrive à

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

2. On choisit comme contour Γ le cercle d'axe Oz , de rayon r orienté selon \vec{e}_θ . On a alors

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r).$$

Il faut distinguer 4 cas pour le calcul de $I_{\text{enlacé}}$.

1er cas : $0 \leq r < R_1$

On a $I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 j$ avec $I = j\pi R_1^2$, d'où $I_{\text{enlacé}} = I \frac{r^2}{R_1^2}$.

2e cas : $R_1 \leq r < R_2$

On a $I_{\text{enlacé}} = I$.

3e cas : $R_2 \leq r < R_3$

On a $I_{\text{enlacé}} = I - j'\pi(r^2 - R_2^2)$, avec $I = j'\pi(R_3^2 - R_2^2)$, d'où

$$I_{\text{enlacé}} = I - I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}.$$

4e cas : $r \geq R_3$

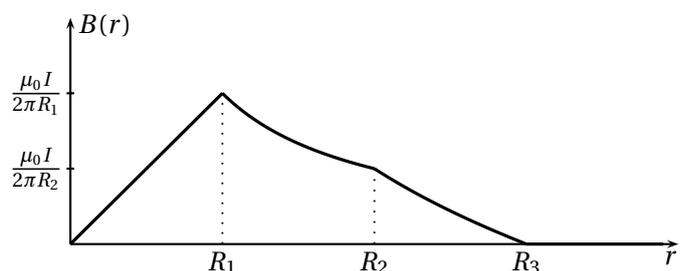
On a $I_{\text{enlacé}} = +I - I = 0$.

Le théorème d'Ampère donne

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}},$$

soit

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r & \text{pour } 0 \leq r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{pour } R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^2 - r^2} & \text{pour } R_2 \leq r < R_3 \\ 0 & \text{pour } r \geq R_3 \end{cases}$$



4 — Cylindre avec cavité

1. On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz . La distribution de courant étant à symétrie cylindrique, le champ magnétostatique est de la forme

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

On choisit comme contour d'Ampère le cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté selon \vec{e}_θ .

On a d'une part

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r)$$

et d'autre part $I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 j$, d'où

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta.$$

On a $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ et $\vec{j} = j \vec{e}_z$, d'où

$$\vec{j} \wedge \vec{OM} = jr \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = jr \vec{e}_\theta.$$

Le champ magnétostatique dans le cylindre s'écrit alors

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{OM}.$$

2. Soient un cylindre d'axe O_1z de rayon a parcouru par $\vec{j} = j \vec{e}_z$ uniforme, et un cylindre d'axe O_2z parcouru par $-\vec{j} = -j \vec{e}_z$ uniforme. La superposition de ces deux distributions donne le cylindre avec la cavité cylindrique.

Le premier cylindre crée le champ

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{O_1M}.$$

Le second cylindre crée le champ

$$\vec{B}_2(M) = -\frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \vec{O_2M}.$$

D'après le théorème de superposition, le champ créé par la distribution totale est

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \frac{\mu}{2} \vec{j} \wedge (\vec{O_1M} - \vec{O_2M})$$

soit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu}{2} \vec{j} \wedge \vec{O_1O_2}.$$

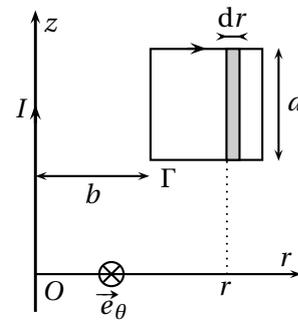
Le champ magnétique est uniforme dans la cavité.

5 — Flux à travers un cadre

En coordonnées cylindriques, d'axe Oz confondu avec le fil, le champ magnétique s'établit avec le théorème d'Ampère (c'est du cours!) et on trouve

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

Orientons le cadre comme indiqué sur la figure :



Le flux à travers le cadre est donné par

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Avec l'orientation choisie, on a $d\vec{S} = dS \vec{e}_\theta$, d'où

$$\Phi = \iint_{\Sigma} B(r) dS.$$

On choisit de découper en bandes $dS = a dr$, d'où

$$\Phi = \int_b^{b+a} B(r) a dr = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right).$$

Le flux vaut

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

6 — Solénoïde épais

1. Les effets de bord sont négligés. On est donc dans le cas d'une distribution de courant qui a les mêmes invariances et symétries que le solénoïde infini :

- invariances par translation selon Oz et rotation autour de Oz , donc les composantes de \vec{B} ne dépendent que de r ;
- le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants, donc \vec{B} est selon \vec{e}_z .

On a donc $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$.

On peut décomposer la distribution de courants en tubes de rayon r , d'épaisseur dr identiques à des solénoïdes. Le champ étant nul à l'extérieur de chacun de ces solénoïde (propriété admise), le champ total à l'extérieur du cylindre est nul :

$$\vec{B} = \vec{0} \text{ pour } r > R_2.$$

On choisit comme contour Γ un rectangle de longueur h selon Oz , un côté étant à la distance $r \in [0, R_2]$ de l'axe et orienté selon \vec{e}_z , l'autre à l'extérieur du cylindre de rayon R_2 (se reporter au cours sur le solénoïde). On a alors

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = hB(r).$$

Si $r < R_1$, on a $I_{\text{enlacé}} = j_0 h (R_2 - R_1)$.

Si $a \leq r \leq R_2$, on a $I_{\text{enlacé}} = j_0 (R_2 - r)$.

On en déduit par application du théorème d'Ampère

$$hB(r) = \begin{cases} \mu_0 j_0 h(R_2 - R_1) & \text{pour } r < R_1 \\ \mu_0 j_0 h(R_2 - r) & \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

d'où

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j_0 (R_2 - R_1) \vec{e}_z & \text{pour } r < R_1 \\ \mu_0 j_0 (R_2 - r) \vec{e}_z & \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

Le champ est uniforme dans la partie centrale de rayon R_1 , puis décroît de façon affine dans la zone $R_1 \leq R_2$ jusqu'à s'annuler pour $r > R_2$.

2. La puissance volumique dissipée dans le matériau est

$$p_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j_0^2}{\gamma}$$

Elle est uniforme car j_0 est uniforme; dans tout le volume, la puissance dissipée vaut donc

$$\mathcal{P}_J = \frac{j_0^2}{\gamma} \pi (R_2^2 - R_1^2) L$$

3. Le champ sur l'axe vaut

$$B_0 = \mu_0 j_0 (R_2 - R_1)$$

On a donc

$$\mathcal{P}_J = \frac{\pi B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{(R_2 - R_1)^2} = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L \frac{(R_2 - R_1)(R_2 + R_1)}{(R_2 - R_1)^2}$$

soit

$$\mathcal{P}_J = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$$

4. Posons

$$x = \frac{R_1}{R_2}$$

On peut alors écrire

$$\mathcal{P}_J = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L \frac{1+x}{1-x} = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L f(x)$$

avec

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

On a

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x} > 0$$

La puissance est donc fonction croissante de x . Comme x varie entre 0 et 1, la puissance dissipée est minimale pour $x = 0$, c'est-à-dire pour $R_1 = 0$.

Elle vaut alors

$$\mathcal{P}_{J,\min} = \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2} \pi L$$

5. On calcule

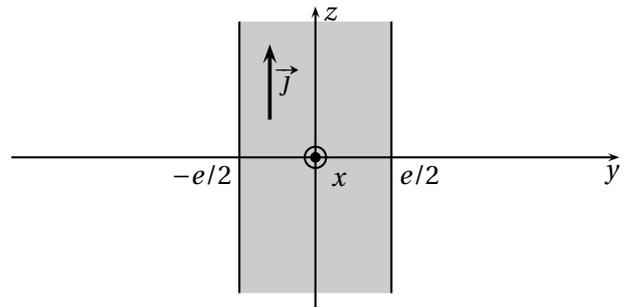
$$\mathcal{P}_{J,\min} = \frac{(1,3^2)}{6 \times 10^7 (4\pi 10^{-7})^2} \pi$$

soit

$$\mathcal{P}_{J,\min} = 56 \text{ kW}$$

La puissance d'un radiateur électrique est de l'ordre de 2 kW. On obtient une puissance dissipée nettement plus importante (près de 30 fois plus).

8 — Nappe de courant



1. La forme générale du champ est

$$\vec{B}(M) = B_x(x, y, z) \vec{e}_x + B_y(x, y, z) \vec{e}_y + B_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

La distribution étant invariante par translation selon x et z , on a

$$\vec{B}(M) = B_x(y) \vec{e}_x + B_y(y) \vec{e}_y + B_z(y) \vec{e}_z$$

Le plan $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant un plan de symétrie de la distribution de courant, on a $B_y = 0$ et $B_z = 0$, d'où

$$\vec{B}(M) = B(y) \vec{e}_x$$

La plan $y = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ se réduit à sa composante parallèle à ce plan. Étant donné deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan, on a donc

$$\vec{B}(M') = -\vec{B}(M)$$

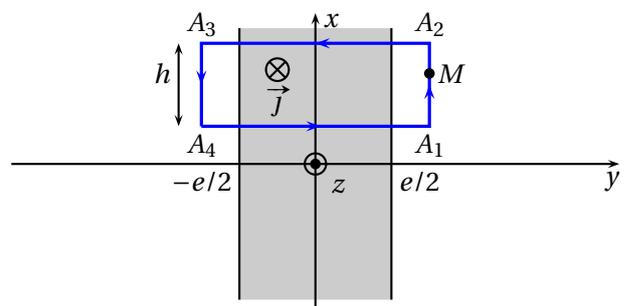
soit

$$B(-y) = -B(y)$$

La composante $B(y)$ est une fonction impaire de y .

2. Compte tenu de la parité de $B(z)$, on mène l'étude pour $y > 0$.

Orientons différemment la figure :



Prenons comme contour Γ le rectangle orienté comme indiqué sur le schéma, compris en $-y$ et y .

On a

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{A_4}^{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Sur A_2A_3 et A_4A_1 on a $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

On a donc

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}(z) \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \vec{B}(-z) \cdot \overrightarrow{A_3A_4} = 2B(z)h.$$

1^{er} cas : $y > e/2$.

On a $I_{\text{enlacé}} = -jhe$, d'où

$$2B(z)h = -\mu_0 jhe$$

et

$$B(z) = -\frac{\mu_0 j e}{2}.$$

2^e cas : $0 \leq y \leq e/2$.

On a $I_{\text{enlacé}} = -jh2z$, d'où

$$2B(z)h = -2\mu_0 jhy$$

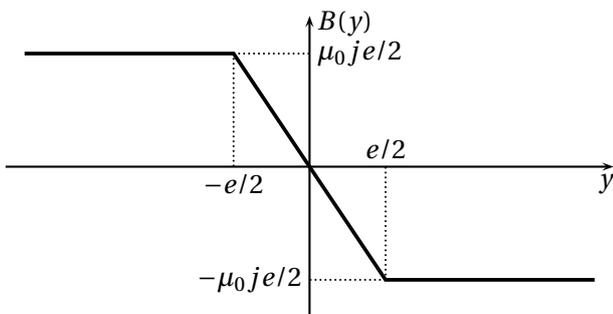
et

$$B(z) = -\mu_0 jy.$$

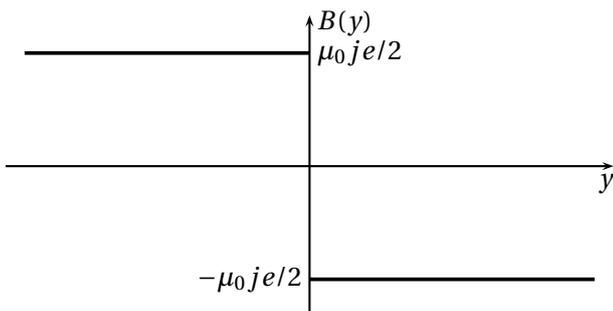
On étend l'expression obtenue de façon à avoir une fonction impaire de z , soit

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\mu_0 j e/2 \vec{e}_x & \text{pour } y > e/2 \\ -\mu_0 jy \vec{e}_x & \text{pour } -e/2 \leq y \leq e/2 \\ \mu_0 j e/2 \vec{e}_x & \text{pour } y \leq -e/2 \end{cases}$$

3. Graphe de la composante $B(y)$:



4. Dans le cas limite où $e \rightarrow 0$, en maintenant je inchangé, on observe une discontinuité du champ magnétique :



Cette situation correspond à une distribution surfacique de courant.

10 — Trois fils

Les lignes de champ s'enroulent autour des fils.

Les trois fils rectilignes, parallèles à l'axe Oz , coupent le plan $z = 0$ aux points $K(x = -1, y = 0)$ (intensité I_1), $L(x = 1, y = 0)$ (intensité I_2) et $M(x = 0, y = 1)$ (intensité I_3).

Le point A , intersection de deux lignes de champ, est un point de champ nul.

En tout point du plan $x = 0$, le champ est normal à ce plan, qui est donc un plan de symétrie de la distribution de courant. On a donc $I_1 = I_2$.

Compte tenu de l'orientation des lignes de champ, on a $I_1 > 0, I_2 > 0$ et $I_3 < 0$.

À grande distance, les lignes de champ entourent les trois fils. Écrivons le théorème d'Ampère en choisissant une telle ligne de champ comme contour Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 (I_1 + I_2 + I_3) > 0$$

compte tenu de l'orientation de ces lignes de champ. Comme $I_1 = I_2$, on a donc $-I_3 < 2I_1$.

► La figure a été obtenue par calcul numérique, en prenant $I_1 = I_2 = 1$ et $I_3 = -1,5$ en unités arbitraires.

Considérons le tube de champ formé par les deux lignes de champ passant de part et d'autre du point P . Sa largeur, et donc sa section Σ — la figure est invariante par translation selon Oz — est deux fois plus petite au point Q .

Le champ \vec{B} étant à flux conservatif, on a

$$B(P) \cdot \Sigma_P = B(Q) \cdot \Sigma_Q$$

soit, avec $\Sigma_P = 2\Sigma_Q$, $B(Q) \approx 0,4 \text{ T}$.

11 — Solénoïde épais

1. Les symétries et les invariances sont les mêmes que pour le solénoïde étudié en cours ; on a donc

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

en coordonnées cylindriques s'axe Oz .

2. On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde (résultat de cours).

On choisit le même contour Γ rectangulaire qu'en cours, de longueur h arbitraire, l'un des côtés parallèles à Oz étant à la distance z de l'axe, orienté selon \vec{e}_z , l'autre à l'extérieur du solénoïde. On a alors

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = hB(r).$$

1^{er} cas : $r < R_1$. Le rectangle entoure $nh \times m(R_2 - R_1)$ spires, d'où

$$I_{\text{enlacé}} = mn(R_2 - R_1)h.$$

Le théorème d'Ampère s'écrit

$$hB(r) = \mu_0 mn(R_2 - R_1)h$$

d'où

$$B(r) = \mu_0 mn(R_2 - R_1).$$

2^e cas : $R_1 \leq r \leq R_2$. Le rectangle entoure $nh \times m(R_2 - r)$ spires, d'où

$$I_{\text{enlacé}} = mn(R_2 - r)h.$$

Le théorème d'Ampère s'écrit

$$hB(r) = \mu_0 mn(R_2 - r)h$$

d'où

$$B(r) = \mu_0 mn(R_2 - r).$$

On a donc

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 mn(R_2 - R_1) \vec{e}_z & \text{pour } r < R_1 \\ \mu_0 mn(R_2 - r) \vec{e}_z & \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

14 — Champ magnétique au voisinage de l'axe d'une spire

1. Plaçons-nous en coordonnées cylindriques d'axe Oz confondu avec l'axe de la spire.

Le champ magnétique s'écrit *a priori* en tout point M de l'espace :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

La distribution étant invariante par rotation autour de Oz , les composantes du champ ne dépendent pas de θ :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

Pour un point M sur l'axe, tous les plans contenant l'axe Oz sont des plans d'anti-symétrie de la distribution de courant; le champ est donc contenu dans l'intersection de ces plans (il appartient à chacun de ces plans), qui est l'axe Oz .

On a donc en tout point M de l'axe de la spire

$$\vec{B}(M) = B_0(z) \vec{u}_z.$$

Considérons deux points $M(z)$ et $M'(-z)$. Ces points sont symétriques par rapport au plan de la spire $z = 0$, qui est un plan de symétrie des courants.

1. À travers la surface latérale, c'est la composante B_r du champ, normale à cette surface, qui est à prendre en compte pour le calcul du flux, tandis qu'à travers les deux surfaces en z et $z + dz$, c'est la composante B_z , normale à ces surfaces, qui est à prendre en compte pour le calcul du flux.

Le champ \vec{B} se réduit à sa composante normale à ce plan. Les règles de transformation du champ magnétique, vecteur axial, s'écrivent

$$\vec{B}_\parallel(M') = \vec{B}_\parallel(M)$$

soit ici

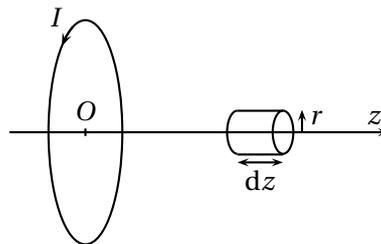
$$B(-z) = B(z).$$

La composante du champ sur l'axe est fonction paire de z .

2. Lors de la question précédente, nous avons montré qu'en tout point de l'espace, le champ est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, z) \vec{u}_z.$$

3. Considérons un cylindre élémentaire d'axe Oz , de rayon $r \ll R$ et de longueur dz . Le flux $d\Phi$ du champ magnétique est nul à travers la surface fermée Σ délimitant ce cylindre.



On calcule ce flux en considérant le champ magnétique comme uniforme sur une section du cylindre ($r \ll R$), et en considérant sa norme comme constante sur la surface latérale du cylindre¹, égale à la valeur $B_0(z)$ sur l'axe :

$$d\Phi = B_0(r, z + dz)\pi r^2 - B_0(r, z)\pi r^2 + 2\pi r dz B_r(r, z) = 0$$

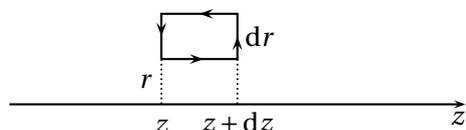
soit :

$$\frac{dB_0}{dz} dz \pi r^2 + 2\pi r dz B_r(r, z) = 0$$

On a donc :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}.$$

4. Représentons le contour élémentaire considéré :



D'après le théorème d'Ampère, la circulation de \vec{B} le long de ce contour est nul car il n'y a aucun courant enlacé.

En décomposant sur les quatre côtés, on obtient

$$B_z(r, z) dz + B_r(r, z + dz) dr - B_z(r + dr, z) dz - B_r(r, z) dz = 0$$

soit

$$(B_z(r + dr, z) - B_z(r, z)) dz = (B_r(r, z + dz) - B_r(r, z)) dr.$$

En linéarisant on obtient

$$\frac{dB_z}{dr} dr dz = \frac{\partial B_r}{\partial z} dr dz$$

soit

$$\frac{dB_z}{dr} = \frac{\partial B_r}{\partial z}.$$

- L'énoncé demandait cette méthode, mais on pouvait obtenir directement cette relation en écrivant que $\text{rot } \vec{B} = \vec{0} \dots$

En utilisant l'expression de $B_r(r, z)$ obtenue à la question précédente, on a

$$\frac{dB_z}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}.$$

Intégrons par rapport à r :

$$B_z(r, z) = -\frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} + C(z)$$

où la « constante » d'intégration est constante vis-à-vis de r , et donc est *a priori* une fonction de z .

En $r = 0$, on a

$$B_z(0, z) = B_0(z) = C(z).$$

On en déduit

$$B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}.$$