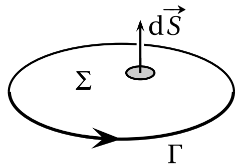
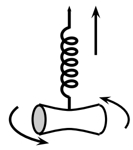
Électromagnétisme — Révision — induction électromagnétique

Flux d'un champ magnétique

Orientation d'un contour et d'une surface s'appuyant sur ce contour

Un contour Γ est une courbe fermée orientée. On l'oriente *arbitrairement* en lui associant un sens de parcours. L'orientation du contour définit l'orientation de toute surface Σ s'appuyant sur Γ selon la règle de Maxwell, appelée familièrement « règle du tire-bouchon » : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens de l'orientation du contour avance dans le sens de l'orientation de la surface $\mathrm{d}\vec{S}$.





- Dans le cas d'une surface Σ plane, on peut définir le vecteur surface $\vec{S}$ par $\vec{S} = S\vec{n}$, où S est l'aire de la surface Σ, et $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à Σ.
- Dans le cas général, on définit le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}_M$ en tout point M de Σ.

Flux d'un champ magnétique à travers un contour orienté

Le flux d'un champ magnétique *uniforme* $\vec{B}_0(t)$ à travers une surface Σ s'appuyant sur un contour *plan* orienté [1] Γ est donné par

$$\boxed{\Phi(t) = \vec{B}_0(t) \cdot \vec{S}}\,.$$

Dans le cas général, le flux d'un champ magnétique à travers un contour orienté Γ s'écrit

$$\boxed{\Phi(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_M}\,,$$

où Σ est une surface orientée s'appuyant sur Γ, son orientation étant déterminée par celle de Γ selon la règle de Maxwell.

Loi de Faraday

Le phénomène d'induction

Considérons un circuit électrique soumis à un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. Si le flux de $\vec{B}(M,t)$ à travers le circuit varie au cours du temps, on observe alors une f.é.m. $e(t)$ dite induite. Si le circuit est fermée, cette f.é.m. entraîne l'apparition d'un courant induit $i(t)$.

- Dans le cas d'un conducteur massif, les courants induits sont caractérisés par une densité volumique $\vec{j}(M,t)$. Ces courants sont appelés **courants de Foucault**.

Loi de Faraday

Soit Γ un circuit filiforme orienté, et Σ une surface orientée s'appuyant sur Γ.
Une variation du flux du champ magnétique à travers le circuit se traduit par l'apparition d'une *f.é.m induite* dans le circuit, donnée par la loi de Faraday.

> La variation du flux $\Phi(t)$ du champ magnétique à travers un circuit entraîne l'apparition d'une f.é.m. induite $e(t)$ donnée par
>
> $$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \Phi(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{B}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

- L'orientation du circuit Γ est utilisée pour orienter — dans le même sens — le courant $i(t)$ et la f.é.m $e(t)$. Cette dernière est donc orientée en convention générateur.

1. Ce flux étant indépendant de la surface s'appuyant sur Γ, on peut alors parler de « flux à travers un contour ».

Loi de modération de Lenz

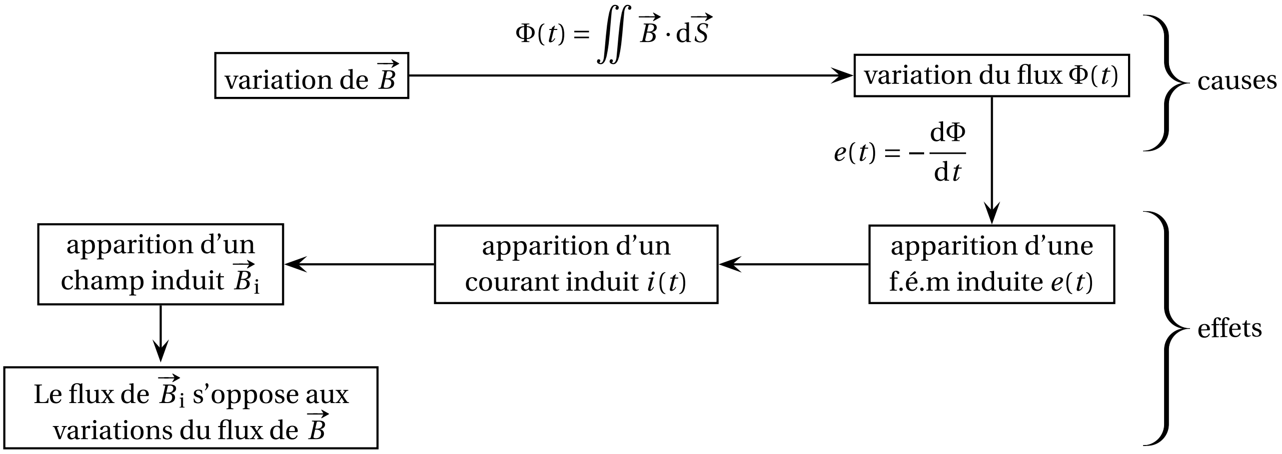
Si le circuit considéré est fermé, la f.é.m induite peut entraîner l'apparition de courants induits.

> Quand ils existent, les courants induits tendent, par leurs conséquences, à s'opposer à leur cause.

- Le signe « – » de la loi de Faraday traduit la loi de Lenz, qui est une *loi de modération*.
- Il faut que des courants induits puissent se développer dans le circuit pour que la loi de Lenz s'applique. Si le circuit est ouvert, la f.é.m induite ne peut s'opposer à la cause de l'induction.
- Attention : ce n'est pas le champ magnétique qui s'oppose pas au champ $\vec{B}$ mais les variations de son flux à travers le circuit qui s'opposent aux variations du flux de $\vec{B}$.

Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

L'enchaînement des causes aux effets du phénomène d'induction[2] peut être décomposé ainsi :



Auto-induction

Inductance propre

Un circuit filiforme orienté Γ parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ crée un champ magnétique propre $\vec{B}_\mathrm{p}(M,t)$.
Le flux de ce champ à travers le circuit Γ lui-même est le **flux propre** :

$$\Phi_\mathrm{p}(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{B}_\mathrm{p}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

où Σ est une surface orientée s'appuyant sur Γ.
On définit l'**inductance propre** L du circuit par

$$\Phi_\mathrm{p}(t) = L\,i(t)$$

- L'inductance propre s'exprime en henry (H). On a $\boxed{L > 0}$.
- L'inductance propre ne dépend que de la géométrie du circuit et de la perméabilité du milieu (μ_0 pour le vide et les milieux non magnétiques). Elle ne dépend pas des caractéristique du matériau constituant le circuit.

Phénomène d'auto-induction

Un courant d'intensité $i(t)$ variable entraîne l'apparition d'une f.é.m induite, appelée f.é.m d'auto-induction, donnée par la loi de Farady $e_\mathrm{p}(t) = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$.
Si le circuit est fixe et rigide, son inductance propre L est constante et la loi de Faraday donne

2. On parle dans ce cas d'induction de Neumann.

$$e_{\mathrm{p}}(t) = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- Quand le phénomène d'auto-induction est localisée dans une bobine idéale, on retrouve la relation entre la tension à ses bornes et l'intensité la traversant *en convention récepteur* :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- Le phénomène d'auto-induction est important quand les fréquences sont élevées, ou quand le circuit comporte un grand nombre de spires. On le néglige dans le cas d'un simple circuit alimenté par un GBF.

Induction mutuelle entre deux circuits filiformes fermés

Coefficient d'inductance mutuelle

On considère deux circuits filiformes orientés Γ_1 et Γ_2 parcourus respectivement par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
Le circuit Γ_1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1(M,t)$ dont le flux à travers Γ_2 est

$$\Phi_{1\to2}(t) = \iint_{M\in\Sigma_2} \vec{B}_1(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

où Σ_2 est une surface orientée s'appuyant sur Γ_2.
Le circuit Γ_2 crée un champ magnétique $\vec{B}_2(M,t)$ dont le flux à travers Γ_1 est

$$\Phi_{2\to1}(t) = \iint_{M\in\Sigma_1} \vec{B}_2(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

où Σ_1 est une surface orientée s'appuyant sur Γ_1.

Les flux étant fonctions linéaires des courants, eux-mêmes fonctions linéaires des courants qui les créent, on définit le coefficient d'inductance mutuelle M par

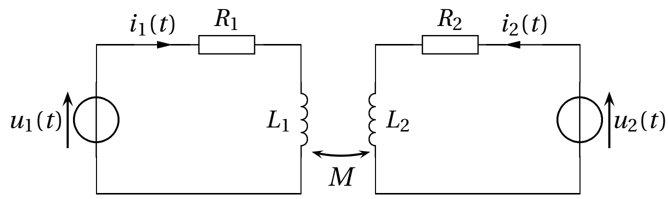
$$\Phi_{1\to2}(t) = Mi_1(t) \qquad \text{et} \qquad \Phi_{2\to1}(t) = Mi_2(t)$$

- L'inductance mutuelle s'exprime en henry (H).
- L'inductance mutuelle M caractérise le couplage magnétique entre les deux circuits. Sa valeur ne dépend que de la géométrie du système et de la perméabilité du milieu.
- L'inductance mutuelle M est algébrique ; son signe, arbitraire, dépend des orientations choisies.

Le champ magnétique total en tout point de l'espace est $\vec{B}(M,t) = \vec{B}_1(M,t) + \vec{B}_2(M,t)$.
Son flux à travers le circuit Γ_1 est $\Phi_1(t) = \Phi_{\mathrm{p},1}(t) + \Phi_{2\to1}(t)$, où $\Phi_{\mathrm{p},1}(t)$ est le flux de $\vec{B}_1$ (flux propre).
Son flux à travers le circuit Γ_2 est $\Phi_2(t) = \Phi_{\mathrm{p},2}(t) + \Phi_{1\to2}(t)$, où $\Phi_{\mathrm{p},2}(t)$ est le flux de $\vec{B}_2$ (flux propre).
On en déduit l'expression du flux magnétique total à travers chaque circuit :

$$\boxed{\Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + Mi_2(t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + Mi_1(t)}$$

On considère deux circuits électriques couplés, d'inductances propres L_1 et L_2, de résistances R_1 et R_2, alimentés sous les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.



Les grandeurs électriques des circuits vérifient le système différentiel :

$$\boxed{\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2(t) = R_2 i_2(t) + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}}$$

- Il n'y a pas de couplage en régime stationnaire.

Énergie magnétique

Le bilan de puissance s'écrit

$$\underbrace{u_1 i_1(t) + u_2 i_2(t)}_{\substack{\text{puissance fournie}\\ \text{par les générateurs}}} = \underbrace{R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)}_{\substack{\text{puissance dissipée}\\ \text{par effet Joule}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)\right)}_{\text{puissance magnétique}}$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans le système s'écrit

$$\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

- L'énergie magnétique est constituée des énergies emmagasinées dans chaque bobine, $\frac{1}{2}L_1 i_1^2$ et $\frac{1}{2}L_2 i_2^2$, et d'une énergie mutuelle $M i_1 i_2$.
- L'énergie magnétique étant positive, on a $\boxed{M^2 \leqslant L_1 L_2}$.
- La cas limite $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ correspond au couplage total : toutes les lignes de champ du champ magnétique créé par un circuit traversent l'autre circuit.

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Résultante des forces de Laplace

Soit circuit filiforme orienté Γ parcouru par un courant d'intensité $i(t)$, placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. L'élément de longueur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ du circuit subit de la part du champ la force de Laplace

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{L} = i(t)\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}\,.$$

- L'orientation du circuit détermine le sens de $\mathrm{d}\vec{\ell}$.
- Dans le cas d'un conducteur parcouru par un courant volumique $\vec{j}$, un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ est soumis à la force de Laplace $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{L} = \vec{j} \wedge \vec{B}\,\mathrm{d}\tau}$.

Actions de Laplace sur une spire

Soit une spire plane orientée de vecteur surface $\vec{S}$, parcourue par un courant $i(t)$. On définit son moment magnétique $\boxed{\vec{\mathcal{M}} = i(t)\,\vec{S}}$.

Placée dans un champ magnétique stationnaire, une spire de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est soumise à des actions de Laplace de résultante nulle : $\vec{F}_\mathrm{L} = \vec{0}$, de moment $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.

- Les actions de Laplace se ramènent alors à un couple, dont l'effet est d'aligner $\vec{\mathcal{M}}$ dans le même sens que $\vec{B}$.

Actions de Laplace et loi de Lenz

Lorsqu'un conducteur, dans un circuit fermé, se déplace dans un champ magnétique constant, un courant induit apparaît ; le circuit est alors soumis à des actions de Laplace qui s'opposent au mouvement, cause du phénomène d'induction (loi de Lenz). Le circuit est donc **freiné** par ces actions.

La puissance fournie par la f.é.m. induite est opposée à la puissance fournie par les actions de Laplace sur le conducteur mobile :

$$\mathcal{P}_\text{induite} = \mathcal{P}_\text{Laplace} = 0\,.$$

- Dans le cas d'un conducteur mobile en translation, on a

$$e_\mathrm{ind}(t)\,i(t) + \vec{F}_\mathrm{L} \cdot \vec{v}(t) = 0\,.$$

- Cette relation traduit le couplage électromécanique parfait.