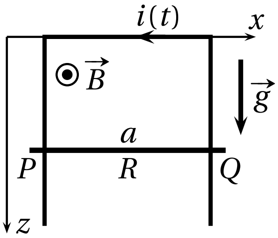
TD d'électromagnétisme Induction (révisions) — solution

1 — Chute d'une barre



Analyse qualitative préliminaire : le barreau choit sous l'effet de la pesanteur; la surface du rectangle traversée par le champ magnétique augmente, entraînant une variation du flux de $\vec{B}$ à travers le circuit. Il apparaît donc une f.é.m. induite, et, le circuit étant fermé, un courant induit. Le cadre est alors de plus soumis à une force de Laplace, dont l'effet est de s'opposer à sa chute (loi de Lenz, la chute est la cause de l'induction).

1. On oriente le circuit comme indiqué sur le schéma ($i(t)$). On choisit une base base orthonormée $(Oxyz)$. On a ici $\vec{B} = B\vec{e}_y$. La position du barreau est repérée par $z(t)$.

2. On calcule le flux $\Phi(t) = Baz(t)$ compte tenu de l'orientation choisie.

3. Loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bav(t)$$

où $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse du barreau.

4. Équation électrique :

$$0 = Ri(t) - e(t)$$

d'où

$$i(t) = -\frac{Ba}{R}v(t).$$

5. Équation mécanique en appliquant le P.F.D. au barreau :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{F}_\mathrm{L}$$

où la force de Laplace est donnée par

$$\vec{F}_\mathrm{L} = i(t)\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} = i(t)a\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_y = Bai(t)\vec{e}_z.$$

Le P.F.D. en projection selon $\vec{e}_z$ conduit à

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg + Bai(t).$$

On élimine $i(t)$ en utilisant l'équation électrique :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{B^2a^2}{R}v(t),$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2a^2}{mR}v(t) = g.$$

En posant $\tau = \dfrac{mR}{B^2a^2}$, on en déduit

$$\boxed{v(t) = v_\ell\left[1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}$$

avec [1]

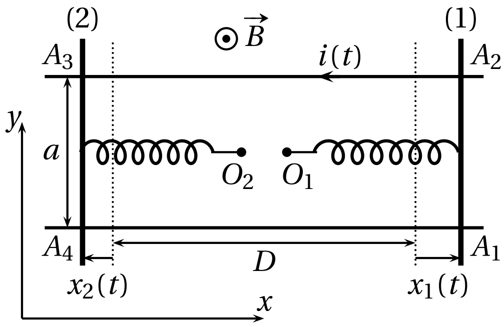
$$\boxed{v_\ell = g\tau = \frac{mgR}{B^2a^2}}.$$

On a bien

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} v(t) = v_\ell}.$$

1. Solution particulière de l'équation complète.

3 — Mouvement de deux tiges



Analyse qualitative préliminaire : une barre étant écartée de sa position d'équilibre, elle est mise en mouvement sous l'effet de la force de rappel du ressort. La surface du cadre varie, donnant naissance à un phénomène d'induction (le flux de $\vec{B}$ varie) ; un courant apparaît dans le circuit fermé, et chaque barre est alors soumise, en plus de la force élastique, à la force de Laplace. Le phénomène d'induction tendant à s'opposer à sa cause, on s'attend à un état final où la surface du cadre est constante, c'est-à-dire à une situation soit où les barres sont au repos, soit où elles restent équidistantes.

1. On oriente le cadre comme indiqué sur le schéma. On repère les positions des barres par rapport à leur position d'équilibre ; sur le schéma, on a donc $x_1(t) > 0$ et $x_2(t) < 0$. On note D la distance entre les barres au repos.

2. Le flux du champ magnétique est

$$\Phi(t) = a\left[D + x_1(t) - x_2(t)\right]B\,.$$

La f.é.m. induite vaut

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Ba\left[\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right].$$

3. L'équation électrique s'écrit $0 = Ri(t) - e(t)$, d'où

$$i(t) = \frac{Ba}{R}\left[\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right].$$

4. On choisit un base $(Oxyz)$ comme indiquée sur le schéma. On a donc $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$.

Attention : il faut appliquer le P.F.D. successivement à chaque barre !

Première équation mécanique.

La force de Laplace subie par la barre (1) s'écrit

$$\vec{F}_{\mathrm{L},1} = i(t)\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{B} = i(t)a\,\vec{e}_y \wedge B\,\vec{e}_z = Bai(t)\,\vec{e}_x\,.$$

Le P.F.D. appliqué à la barre (1) s'écrit donc, en projection selon $\vec{e}_x$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1 + Bai(t)\,.$$

Deuxième équation mécanique.

La force de Laplace subie par la barre (2) s'écrit

$$\vec{F}_{\mathrm{L},2} = i(t)\overrightarrow{A_3A_4} \wedge \vec{B} = i(t)(-a\,\vec{e}_y) \wedge B\,\vec{e}_z = -Bai(t)\,\vec{e}_x\,.$$

Le P.F.D. appliqué à la barre (2) s'écrit donc, en projection selon $\vec{e}_x$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -kx_2 - Bai(t)\,.$$

On élimine $i(t)$ à l'aide de l'équation électrique pour obtenir le système d'équations différentielles couplées :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1(t) + \frac{B^2a^2}{R}\left[\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right] \qquad (1)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -kx_2(t) - \frac{B^2a^2}{R}\left[\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right] \qquad (2)$$

Effectuons la somme (1) + (2) :

$$m\frac{\mathrm{d}^2[x_1+x_2]}{\mathrm{d}t^2} = -k[x_1(t) + x_2(t)]$$

soit en posant $u = x_1 +_2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}u(t) = 0\,. \qquad (3)$$

Effectuons la différence (1) − (2) :

$$m\frac{\mathrm{d}^2[x_1-x_2]}{\mathrm{d}t^2} = -k[x_1 - x_2] + \frac{2B^2a^2}{R}\left[\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right]$$

soit en posant $v = x_1 - x_2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2B^2a^2}{mR}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v(t) = 0\,. \qquad (4)$$

L'équation (4) est du type « oscillateur linéaire amorti ». On ne peut ici savoir quel sera son régime (apériodique amorti, critique, pseudo-périodique amorti), mais **on sait que dans tous les cas**

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0\,.$$

On atteint alors un régime permanent (la phase pendant laquelle $v(t)$ n'est pas négligeable caractérise le régime transitoire), pour lequel $v(t) = 0$, c'est-à-dire $x_1(t) = x_2(t)$.

L'équation (3) est celle de l'oscillateur harmonique. En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient

$$u(t) = U_1\cos\omega_0t + U_2\sin\omega_0t\,.$$

Les conditions initiales sont telles que

$$u(0) = X_{10} = U_1$$

et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = -\omega_0U_2\,.$$

On a donc

$$v(t) = x_1(t) - x_2(t) = X_{10}\cos\omega_0t\,.$$

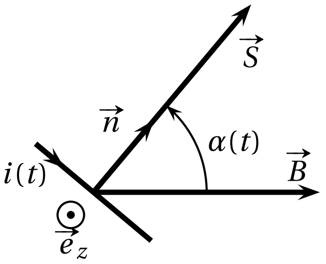
Comme $x_1(t) = x_2(t)$, on en déduit, en régime permanent :

$$\boxed{x_1(t) = x_2(t) = \frac{X_{10}}{2}\cos\omega_0t}\,.$$

En régime permanent, les deux barres restent équidistantes ; il n'y a alors plus de phénomène d'induction (le régime permanent ne dépend d'ailleurs pas de B).

4 — Arrêt d'une spire

1. On oriente la verticale selon $\vec{e}_z$. Une « vue de dessus » donne :



On oriente la spire comme indiqué par l'intensité $i(t)$; on en déduit le vecteur normal $\vec{n}$ et le vecteur surface $\vec{S} = \pi a^2 \vec{n}$.
Le flux du champ magnétique est donné par

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\pi a^2 \cos\alpha(t)\,.$$

La f.é.m. induite vaut alors

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = B\pi a^2 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \sin\alpha(t)\,.$$

L'équation électrique $0 = Ri(t) - e(t)$ permet d'en déduire

$$i(t) = \frac{B\pi a^2}{R} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \sin\alpha(t)\,.$$

Une spire plane parcourue par un courant électrique $i(t)$ possède un moment magnétique

$$\vec{M} = i(t)\vec{S} = \pi a^2 i(t)\vec{n}\,.$$

Les actions de Laplace se ramènent à un couple de moment

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -i(t) SB \sin\alpha(t)\vec{e}_z$$

soit

$$\vec{\Gamma} = -B\pi a^2 i(t) \sin\alpha(t)\vec{e}_z = -\frac{(\pi a^2 B)^2}{R} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \sin^2\alpha\, \vec{e}_z\,.$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à la spire s'écrit donc, en projection selon $\vec{e}_z$:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$$

soit

$$\frac{ma^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{(\pi a^2 B)^2}{R} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \sin^2\alpha\,.$$

On obtient l'équation du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -2\frac{(\pi a B)^2}{mR} \sin^2\alpha \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (5)$$

2. Comme le suggère l'exercice 9, l'astuce consiste non pas à résoudre l'équation (5) pour déterminer $\alpha(t)$, mais à trouver une relation entre α et $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.
En utilisant la relation classique

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,,$$

on obtient, en remarquant que $\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot\alpha}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}\dot\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{(\pi a B)^2}{mR}[1-\cos 2\alpha] \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

soit

$$\mathrm{d}\dot\alpha = -\frac{(\pi a B)^2}{mR}[1-\cos 2\alpha]\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

À l'instant initial on a $\alpha(t=0) = 0$ et $\dot\alpha(t=0) = \dot\alpha_0$; à l'instant final $\dot\alpha = 0$ pour $\alpha = \alpha_\mathrm{F}$. On en déduit

$$\int_{\dot\alpha_0}^{0} \mathrm{d}\dot\alpha = -\frac{(\pi a B)^2}{mR} \int_0^{\alpha_\mathrm{F}} [1-\cos 2\alpha]\,\mathrm{d}\alpha$$

soit

$$-\dot\alpha_0 = -\frac{(\pi a B)^2}{mR}\left[\alpha_\mathrm{F} - \frac{\sin 2\alpha_\mathrm{F}}{2}\right].$$

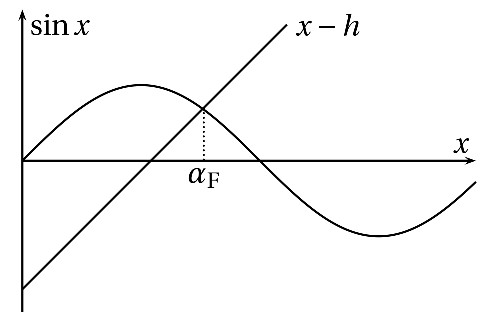
L'angle d'arrêt est donc solution de

$$\sin 2\alpha_\mathrm{F} = 2\alpha_\mathrm{F} - \frac{2mR}{(\pi a B)^2}\dot\alpha_0\,. \qquad (6)$$

L'équation (6) est de la forme

$$\sin x = x - h$$

en posant $x = 2\alpha_\mathrm{F}$ et $h = \frac{2mR}{(\pi a B)^2}\dot\alpha_0$.
L'équation $\sin x = x - h$ admet une unique solution, comme on le voit graphiquement :



Pour obtenir $\alpha_\mathrm{F} = \pi/2$, il faut

$$0 = \pi - \frac{2mR}{(\pi a B)^2}\dot\alpha_0\,,$$

d'où

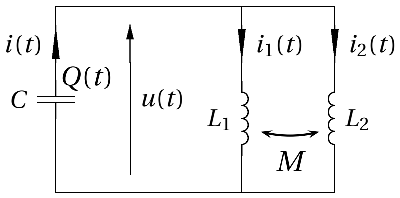
$$\boxed{B = \sqrt{\frac{2mR\dot\alpha_0}{\pi^3 a^2}}}\,.$$

3. Pour $\dot{\alpha}_0 = 2\pi$ rad$\cdot$s^{-1}, on a

$$B = \frac{2\sqrt{mR}}{\pi a}$$

soit $\boxed{B = 0{,}11\ \mathrm{T}}$.

5 — Évolution d'un circuit avec couplage



Aux bornes de L_1, on peut écrire

$$u(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

De même aux bornes de L_2 :

$$u(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

Le condensateur étant orienté en convention générateur, on a

$$i(t) = -C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i_1(t) + i_2(t). \tag{9}$$

Les équations (7) et (8) donnent

$$(L_1 - M) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = (L_2 - M) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

Avec les conditions initiales $i_1(0) = i_2(0) = 0$, une intégration conduit à

$$(L_1 - M) i_1(t) = (L_2 - M) i_2(t). \tag{10}$$

On a donc $i_2(t) = \dfrac{L_1 - M}{L_2 - M} i_1(t)$, et la somme des équations (7) et (8) s'écrit

$$\begin{aligned} 2u(t) &= (L_1 + M) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (L_2 + M) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \left((L_1 + M) + (L_2 + M) \frac{L_1 - M}{L_2 - M} \right) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ &= 2 \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

On a donc

$$u(t) = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

L'équation (9) conduit à

$$-C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(1 + \frac{L_1 - M}{L_2 - M} \right) i_1(t) = \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_2 - M} i_1(t)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{L_1 + L_2 - 2M}{(L_2 - M)C} i_1(t).$$

Avec (11), on obtient en dérivant

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{L_1 + L_2 - 2M}{(L_2 - M)C} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{L_1 + L_2 - 2M}{(L_2 - M)C} \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2} u(t).$$

La tension vérifie donc l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2} u(t) = 0. \tag{12}$$

En posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2 - 2M}{(L_1 L_2 - M^2)C}}}$, la solution est de la forme

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t).$$

Avec (9), la condition initiale $i(0) = 0$ s'écrit $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right)_{t=0} = 0$, d'où $A_2 = 0$ et $u(t) = A_1 \cos(\omega_0 t)$.
La charge initiale du condensateur est donnée par $Q_0 = Cu(0) = CA_1$, d'où finalement

$$\boxed{u(t) = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t)}. \tag{13}$$

On peut calculer $i_1(t)$ avec (11), puis $i_2(t)$ avec (10).

Remarque

Le cas où $L_1 = L_2 = L$ est beaucoup moins calculatoire !
Les deux branches jouant le même rôle, on a $i_1(t) = i_2(t) = i'(t)$ (le circuit est invariant par permutation des deux branches).
La tension est alors simplement donnée par

$$u(t) = (L + M) \frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}.$$

Le condensateur est traversé par l'intensité $i(t) = 2i'(t)$, d'où

$$2i'(t) = -C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

On a donc

$$u(t) = -\frac{(L+M)C}{2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{(L+M)C}}$$

On vérifie que cette expression de ω_0 correspond bien à l'expression précédente avec $L_1 = L_2 = L$.

6 — Oscillateurs couplés par induction mutuelle

1. On néglige R. On écrit pour les deux mailles

$$E = \frac{q_1}{C} + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

et

$$\frac{q_2}{C} = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

avec (attention aux orientations!)

$$i_1 = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i_2 = -\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}.$$

En posant $k = M/L$ et $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} - k\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q_1 = \frac{E}{L}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} - k\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q_2 = 0.$$

On pose $S(t) = q_1(t) + q_2(t)$ et $D(t) = q_1(t) - q_2(t)$; on fait la somme et la différence de ces deux équations différentielles :

$$(1-k)\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 S = \frac{E}{L}$$

et

$$(1+k)\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 D = \frac{E}{L}.$$

Les solutions générales sont

$$S(t) = A_1 \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right) + A_2 \sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right) + CE$$

et

$$D(t) = A_3 \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right) + A_4 \sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right) + CE.$$

Les condensateurs étant initialement déchargés, on a $S(0) = D(0) = 0$. Les bobines imposent la continuité du courant, donc $\dot{S}(0) = \dot{D}(0) = 0$. On en déduit $A_1 = A_3 = -E/\omega_0^2$, et $A_2 = A_4 = 0$, d'où

$$S(t) = CE\left[1 - \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right)\right]$$

et

$$D(t) = CE\left[1 - \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right)\right].$$

On en déduit

$$\boxed{q_1(t) = CE\left[1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right)\right]}$$

et

$$\boxed{q_2(t) = \frac{CE}{2}\left[\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right) - \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right)\right]}.$$

On obtient $q_1(\infty) = CE$ et $q_2(\infty) = 0$ comme on peut le prévoir en considérant le circuit en régime continu.

2. Si on tient compte de la résistance R, on obtient

$$E = \frac{q_1}{C} + Ri_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

et

$$\frac{q_2}{C} = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} - k\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q_1 = \frac{E}{L}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} - k\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q_2 = 0.$$

Problème : on ne peut découpler facilement ces équations...

Je penche pour une erreur d'énoncé : si on place la même résistance R dans l'autre circuit, la seconde équation devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} - k\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q_2 = 0.$$

On peut alors poser $S = q_1 + q_2$ et $D = q_1 - q_2$, d'où

$$(1-k)\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 S = \frac{E}{L}$$

et

$$(1+k)\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 D = \frac{E}{L}$$

Les solutions particulières décrivent le régime continu : $S(\infty) = D(\infty) = CE$, soit $q_1(\infty) = CE$ et $q_2(\infty) = 0$ comme précédemment. Le régime continu est atteint après un régime transitoire dont la nature (apériodique, pseudo-périodique, critique) est déterminée par le signe des discriminants

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - 4\omega_0^2(1 \pm k).$$