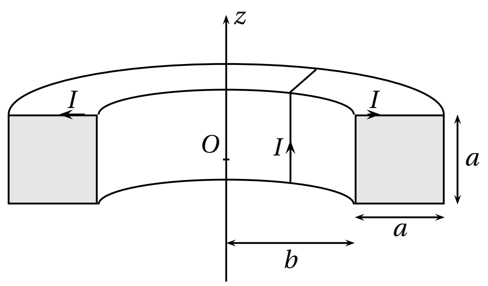
TD d'électromagnétisme n° 3 — Électromagnétisme dans l'ARQS

1 — Solénoïde torique

On considère un solénoïde torique de rayon intérieur b, comportant N spires parcourues par un courant d'intensité I. Sa section carrée, de coté a, est comprise entre les cotes $z=-a/2$ et $z=a/2$.



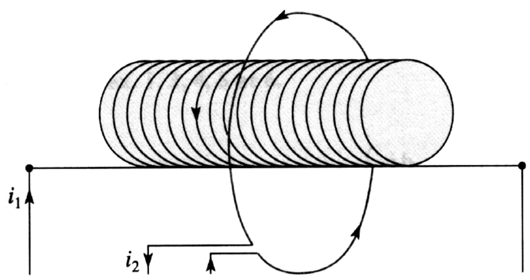
Déterminer l'inductance propre L du solénoïde. Discuter du cas $a \ll b$.

2 — Lumière !

On considère une ligne haute tension parcourue par un courant I, à une fréquence f. On place une bobine constituée de N spires de côtés a à une distance d de la lignent reliée à une ampoule. Cette ampoule s'allume lorsque la tension à ses bornes dépasse e_{min}.
Combien doit valoir N pour que la lampe s'allume ?

3 — Solénoïde et une spire couplées

Une bobine de N_2 spires enlace un solénoïde idéal de N_1 spires, de longueur ℓ et de section S.



1. Calculer l'inductance mutuelle M de ces deux circuits, avec les orientations données sur le schéma.

2. La bobine de résistance R est fermée sur elle-même. Le solénoïde est parcouru par le courant $i_1(t)=i_0\cos\omega t$. On suppose de plus que $N_2 \ll N_1$. Montrer que l'inductance L_2 est négligeable, et déterminer le courant $i_2(t)$ dans la bobine.

3. Proposer une méthode simple, utilisant un GBF et un oscilloscope, pour mesurer M.

4 — La roue tourne

On considère un disque isolant de rayon R. Sur son contour sont disposées N charges, réparties de manière périodique, le tout portant une charge totale q. Cet ensemble forme une liaison parfaite avec l'axe Oz, et son moment d'inertie par rapport à cet axe est noté J. On place le tout dans un solénoïde très long, portant n spires par unité de longueur, et on note $i(t)$ le courant traversant ses spires.
À l'instant $t=0$, on a $i=0$ et le disque est immobile. On fait alors varier le courant de $t=0$ à $t=\tau$ de manière linéaire, jusqu'à une valeur i_0. À partir de $t=\tau$, le courant est constant, égal à i_0. Que se passe-t-il ?

5 — Décharge d'une sphère

On considère deux sphères creuses conductrices de rayons R_1 et $R_2>R_1$. La conductivité électrique du milieu entre les deux sphères est γ.
À $t=0$, la charge Q est répartie uniformément sur la sphère intérieure. La charge se déplace de façon isotrope vers la sphère extérieure ; au bout d'un temps infini, l'intégralité de la charge se trouve sur cette sphère.

1. Rappeler la loi d'Ohm locale.

2. Déterminer $\vec{E}$ pour $t=0$ et $t\to\infty$.

3. Justifier que $\vec{B}=\vec{0}$ pour tout t.

4. À partir d'une équation de Maxwell, déterminer l'expression de $\vec{E}(M,t)$.

5. Donner l'expression de l'énergie volumique électromagnétique, puis calculer la variation d'énergie du système.

6. Donner l'expression de l'énergie dissipée par effet Joule et commenter.

6 — Cylindre métallique dans un champ magnétique variable

Un cylindre métallique de conductivité électrique γ, de rayon R, de longueur $L \gg R$ et d'axe Oz est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$.

1. Il apparaît dans le cylindre un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ dont on admet qu'il est orthoradial en coordonnées cylindriques d'axe Oz. À l'aide d'une équation de Maxwell sous forme intégrale, déterminer l'expression de ce champ.

2. On se place dans le cadre d'application de la loi d'Ohm locale. Calculer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre et la puissance totale moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

3. Justifier que les courants apparaissant dans le cylindre créent un champ magnétique $\vec{B}_\mathrm{i} = B_\mathrm{i}(r,t)\vec{e}_z$. En admettant que ce champ est nul à l'extérieur du cylindre, déterminer son expression. On se placera dans le cadre de l'ARQS magnétique. À quelle condition sur R peut-on négliger le champ magnétique $\vec{B}_\mathrm{i}$?

4. On se place dans l'hypothèse où les champs magnétiques induits sont effectivement négligeables. On note μ la masse volumique du cylindre, c sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique. On active le champ $\vec{B}$ pendant une durée très courte devant la durée typique de diffusion thermique dans le matériau.

En se basant sur un raisonnement semi-quantitatif, dessiner l'allure du profil de température dans le cylindre juste après que l'on ait coupé le champ. Déterminer un temps caractéristique d'homogénéisation de la température dans le cylindre.

7 — Courants de Foucault

Un cylindre de hauteur h, de rayon a, d'axe Oz et de conductivité γ, est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \cos\omega t\,\vec{e}_z$.

1. Quel dispositif faut-il pour obtenir un tel champ ?

2. Calculer $\vec{E}$ et $\vec{J}$, sachant que le cylindre respecte la loi d'Ohm.

3. Calculer la puissance volumique $p(t)$ dissipée par effet Joule, la puissance totale consommée $P(t)$ et sa valeur moyenne $\langle P\rangle$.

4. On veut remplacer le système par N cylindres de rayon a' de telle sorte que le volume total soit conservé.

Calculer a'. Calculer la puissance moyenne $\langle P'\rangle$ consommée par le nouveau système. Comparer $\langle P\rangle$ et $\langle P'\rangle$.

8 — Décharge d'une boule conductrice

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R, porte initialement la charge Q_0, uniformément répartie en surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ. À l'instant t, la boule porte la charge $Q(t)$.

On cherche à déterminer le champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre O.

1. Déterminer $\vec{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule. On examinera les symétries et invariances de la distribution.

2. À partir des équations de Maxwell, déterminer le champ $\vec{E}(M,t)$ à l'extérieur de la sphère. On définira un temps caractéristique τ.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. La résoudre. Commenter.

4. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu. Commenter

9 — Courant induit dans un cadre

On considère un fil infini d'axe $z'z$ parcouru par un courant électrique d'intensité I. On place à proximité un cadre conducteur carré de côté a, que l'on met en mouvement à la vitesse constante $\vec{v}$ à $t = 0$. Le cadre reste à tout instant dans le même plan que le cadre.

Calculer l'intensité $i(t)$ dans le cadre.

10 — Diffusion du champ magnétique

Le demi-espace $z > 0$ est un milieu conducteur, de conductivité γ. Le demi-espace $z < 0$ correspond au vide. Pour $t < 0$, on a un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_x$. À $t = 0$, le champ devient égal à $\vec{B}_1 = B_1\vec{e}_x$. On néglige le courant de déplacement devant les courants volumiques de conduction.

Le champ magnétique dans le conducteur est de la forme $\vec{B} = B(z,t)\,\vec{e}_x$.

1. Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\vec{B}$. Expliquer pourquoi le champ magnétique « diffuse » dans le milieu conducteur. Qualifier ce phénomène.

2. On pose $B(z,t) = b(u)$ avec $u = \dfrac{z}{\sqrt{t}}$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $b(u)$, que l'on mettra sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}u^2} = f(u)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}.$$

Expliciter $f(u)$. En déduire que

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 u^2}.$$

Exprimer α en fonction de μ_0 et γ.

3. Trouver λ en fonction de B_0, B_1, γ et μ_0 sachant que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Trouver l'expression des courants volumiques $\vec{j}(z,t)$.

5. Donner deux autres domaines de la physique avec lesquels on peut faire une analogie.

11 — Ça chauffe !

Entre deux sphères concentriques de rayons $R_1 < R_2$ se trouve un conducteur ohmique de conductivité γ. Initialement, une charge Q est uniformément répartie à la surface de la sphère intérieure. À $t = 0$ on inflige un décharge créant le courant $\vec{j} = j(r,t)\,\vec{e}_r$ dans le conducteur et la charge Q se déplace sur la sphère extérieure.

1. Donner la loi d'Ohm locale et son domaine de validité.

2. Donner $\vec{E}$ et $\vec{B}$ avant et après la décharge.

3. Montrer que, pendant la décharge, $\vec{B}$ est nul partout et tout le temps, en utilisant uniquement des éléments de symétrie.

4. En déduire $\vec{E}$ pendant la décharge, à l'aide d'une équation de Maxwell, puis en déduire un temps caractéristique τ de la décharge.

5. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique pendant la décharge.

En déduire la variation de densité énergétique entre $t = 0$ et $t \gg \tau$.

12 — Faisceau de particules α

On considère un faisceau cylindrique de particule α (noyaux He^{2+}) de rayon R de d'axe Oz. Les particules portent une charge $q = 2\mathrm{e}$ et, après accélération sous une tension de 1 kV, elles sont animées d'une vitesse $\vec{v}$ constante. Leur densité volumique est notée n.

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

2. Déterminer de même le champ magnétique $\vec{B}$ régnant en tout point de l'espace. Exprimer $\vec{B}$ en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{v}$.

3. Reprendre les calculs précédents dans le référentiel des particules α. Que constate-t-on ? Commenter.

4. On revient dans le référentiel du laboratoire. Exprimer la force volumique due au champ électromagnétique $[\vec{E},\vec{B}]$ subie par les particules α. Commenter le résultat.

5. On note p_0 la pression régnant dans le milieu ambiant. Déterminer la valeur minimale de p_0 garantissant la stabilité du faisceau cylindrique.