TD d'électromagnétisme n° 3 — Électromagnétisme dans l'ARQS

1 — Solénoïde torique

Le champ magnétique a été calculé en cours : il est nul à l'extérieur du solénoïde, et à l'intérieur il vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{e}_\theta .$$

Calculons le flux de $\vec{B}$ à travers une section du tore :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} a\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\right).$$

Le flux propre est compté à travers la totalité des spires : $\Phi_\mathrm{p} = N\Phi$, soit

$$\Phi_\mathrm{p} = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right).$$

De $\Phi_\mathrm{p} = LI$, on déduit l'inductance propre

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}.$$

Dans le cas où $a \ll b$, on linéarise $\ln(1+a/b) \approx a/b$, d'où

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi b} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell},$$

où $S = a^2$ est la section du solénoïde et $\ell = 2\pi b$ sa longueur. On retrouve l'expression de l'inductance propre du solénoïde infini, comme attendu quand le rayon de courbure du solénoïde torique est très grand devant sa section.

2 — Lumière !

La ligne haute tension est un fil infini qui crée à une distance r un champ magnétique d'intensité

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Son flux à travers une spire carrée de la bobine est

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{a\,\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}a\ln\left(1+\frac{a}{d}\right).$$

À travers les N spires de la bobine, le flux total $\Phi = N\Phi_1$ vaut donc

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi}a\ln\left(1+\frac{a}{d}\right).$$

Avec un courant sinusoïdal $I(t) = I_0\cos(2\pi f t)$, la f.é.m. induite dans la bobine est

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 2\pi f N}{2\pi} a I_0 \sin(2\pi f t)\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)$$

soit

$$e(t) = \mu_0 N f I_0 a \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\sin(2\pi f t) = e_\mathrm{m}\sin(2\pi f t).$$

Son amplitude doit être $e_\mathrm{m} > e_\mathrm{min}$ ce qui est vérifié si

$$\boxed{N > \frac{e_\mathrm{min}}{\mu_0 N f I_0 a \ln\left(1+\frac{a}{d}\right)}}.$$

3 — Solénoïde et une spire couplées

1. L'inductance M est donnée par

$$\Phi_{1\to 2} = M i_1(t) \quad \text{et} \quad \Phi_{2\to 1} = M i_2(t).$$

Dans cette situation, on peut calculer facilement le champ créé par le solénoïde :

$$\vec{B}_1(t) = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1(t)\vec{e}_z$$

à l'intérieur et nul à l'extérieur.

Le flux de ce champ à travers la bobine 2 vaut alors, compte tenue des orientations relatives des deux spires

$$\Phi_{1\to 2} = N_2 B_1(t) S = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{\ell} i_1(t) = M i_1(t)$$

d'où

$$\boxed{M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{\ell}}.$$

2. L'inductance propre d'une bobine étant proportionnelle à N^2, on a $L_2 \propto N_2^2$. Comme $N_2 \ll N_1$ et $M \propto N_1 N_2$, on a $L_2 \ll M$.

On peut donc négliger le flux propre à travers la bobine ; la f.é.m. induite dans la bobine vaut donc

$$e(t) = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{\ell} i_0\omega\sin(\omega t) = R i_2(t),$$

d'où

$$\boxed{i_2(t) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{\ell R} i_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

La bobine de résistance R est fermée sur elle-même. Le solénoïde est parcouru par le courant $i_1(t) = i_0\cos\omega t$. On suppose de plus que $N_2 \ll N_1$. Montrer que l'inductance L_2 est négligeable, et déterminer le courant $i_2(t)$ dans la bobine.

3. On peut mesurer la tension aux bornes de la bobine :

$$u_2(t) = M i_0 \omega \sin(\omega t).$$

Connaissant i_0 et ω, on peut en déduire M.

4 — La roue tourne

Le solénoïde est parcouru par le courant

$$i(t) = \begin{cases} i_0 \frac{t}{\tau} & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ i_0 & \text{pour } t > \tau \end{cases}$$

En prenant des coordonnées cylindriques d'axe Oz, axe du solénoïde, le champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde vaut $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$, soit

$$\vec{B}(t) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 \frac{t}{\tau} \vec{e}_z & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ \mu_0 n i_0 \vec{e}_z & \text{pour } t > \tau \end{cases}$$

Les charges sur le disque, initialement au repos, ne peuvent être mises en mouvement que par un champ électrique (un champ magnétique peut dévier des charges ayant une vitesse non nulle, mais ne peut pas mettre des charges au repos en mouvement avec $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ si $\vec{v} = \vec{0}$). Ici, seul un champ magnétique variable peut créer un champ électrique.
Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants du solénoïde, donc $\vec{E}(M,t) = E(M,t)\vec{e}_\theta$. Par invariance par translation selon Oz et rotation autour de Oz, on déduit

$$\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{e}_\theta\,.$$

Nous allons utiliser la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}(M,n)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = -\iint_{P\in\Sigma} \frac{\partial \vec{B}(P,t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P\,.$$

En prenant comme contour Γ le cercle d'axe Oz, de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$, on a

$$\oint_{M\in\Gamma} \vec{E}(M,n)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = 2\pi r E(r,t)\,.$$

On a

$$\frac{\partial \vec{B}(P,t)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n i_0}{\tau}\vec{e}_z & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ \vec{0} & \text{pour } t > \tau \end{cases}$$

Le champ électrique induit est donc nul pour $t > \tau$.
Pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$, on a

$$2\pi r E(r,t) = -\frac{\mu_0 n i_0}{\tau}\pi r^2\,,$$

d'où

$$\vec{E}(M,t) = -\frac{\mu_0 n i_0}{2\tau} r\,\vec{e}_\theta \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Chaque charge sur le disque isolant est soumise à la force

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\frac{\mu_0 q n i_0}{2\tau} R\,\vec{e}_\theta\,.$$

Le moment en O de cette force est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = R\vec{e}_r \wedge \vec{F} = -\frac{\mu_0 q n i_0}{2\tau} R^2 \vec{e}_z\,.$$

Le moment total selon Oz s'exerçant sur les N charges est

$$\mathcal{M}_{\text{tot}} = -\frac{\mu_0 q n i_0}{2\tau} N R^2\,.$$

Appliquons le théorème du moment cinétique au disque isolant :

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\text{tot}} = -\frac{\mu_0 q n i_0}{2\tau} N R^2$$

où $\omega(t)$ est sa vitesse angulaire de rotation.
Partant du repos, la vitesse angulaire croît de façon affine jusqu'à $t = \tau$, puis reste constante pour $t > \tau$:

$$\boxed{\omega(t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 q n i_0}{2J\tau} N R^2 t & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ -\frac{\mu_0 q n i_0}{2J} N R^2 & \text{pour } t > \tau \end{cases}}$$

5 — Décharge d'une sphère

1. La loi d'Ohm locale s'écrit

$$\boxed{\mathrm{j} = \gamma \vec{E}}\,.$$

2. Pour $t = 0$, on a une sphère de rayon R_1 portant la charge Q_1 à sa surface. Le problème est à symétrie sphérique, d'où $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. On applique la théorème de Gauss avec une sphère de rayon r :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_1 \\ Q_1 & \text{si } r > R_1 \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\vec{E}(M,t=0) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{si } r > R_1 \end{cases}}$$

Pour $t \to \infty$, on a une situation similaire, la charge Q_1 étant portée par la sphère de rayon R_2, on en déduit donc

$$\boxed{\vec{E}(M,\infty) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_2 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{si } r > R_2 \end{cases}}$$

3. La densité de courant, colinéaire à $\vec{E}$, est radiale : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_r$.
Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ étant un plan de symétrie, on a $B_r = B_\theta = 0$.
Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ étant un plan de symétrie, on a $B_r = B_\varphi = 0$.
On en déduit $\boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{0}}$ pour tout t.

4. Avec $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) = \overrightarrow{0}\,,$$

d'où

$$\overrightarrow{E} + \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{0}\,.$$

Connaissant $\overrightarrow{E}(M, t = 0)$, on en déduit le champ magnétique entre les deux sphères :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \overrightarrow{e}_r \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}\,.$$

Le champ électrique garde la même expression pour $r > R_2$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \overrightarrow{e}_r & \text{pour } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \overrightarrow{e}_r & \text{si } r > R_2 \end{cases}}$$

5. Le champ magnétique étant nul, l'énergie électromagnétique n'est portée que par le champ électrique, avec la densité $w(M,t) = \dfrac{\varepsilon_0 E^2(M,t)}{2}$, soit

$$w(M,t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < R_1 \\ \frac{Q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) & \text{pour } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

L'énergie électromagnétisme restant constante au cours du temps, la variation d'énergie du système est égale à la variation d'énergie électromagnétique entre les deux sphères.
À $t = 0$, est elle donnée par

$$\mathcal{E}(0) = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^2 w(r,0)\,\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Avec $\mathcal{E}(\infty) = 0$, la variation $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(0)$ vaut

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = -\frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}\,.$$

6. La puissance volumique dissipée par effet Joule entre les deux sphères vaut

$$p(r,t) = \gamma E^2(r,t) = \frac{\gamma Q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right).$$

Dans tout le volume entre les deux sphères, elle vaut

$$P_\mathrm{J}(t) = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^2 p(r,t)\,\mathrm{d}r = \frac{\gamma Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0^2} \mathrm{e}^{-2t/\tau} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$
$$= \frac{\gamma Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

L'énergie totale dissipée par effet Joule vaut donc

$$\mathcal{E}_\mathrm{J} = \int_0^\infty P_\mathrm{J}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\gamma Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\tau}{2}\frac{\gamma Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left[\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\tau\gamma Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

soit comme $\tau\gamma = \varepsilon_0$

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{J} = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}\,.$$

On remarque que $\mathcal{E}_\mathrm{J} = -\Delta\mathcal{E}$: toute l'énergie perdue par le champ a été cédée au milieu conducteur par effet Joule.

6 — Cylindre métallique dans un champ magnétique variable

1. On utilise

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

sous forme intégrale, soit

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Sigma \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}\,.$$

On choisit comme contour Γ un cercle de rayon r orienté selon θ. Les composantes des champs ne dépendent pas de θ par invariance par rotation autour de Oz ni de z (effets de bord négligés), d'où

$$2\pi r E(r,t) = \pi r^2 B_0 \omega \sin(\omega t)\,.$$

On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{B_0\omega}{2} r \sin(\omega t)\,\overrightarrow{e}_\vartheta}\,.$$

2. Loi d'Ohm locale : $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$.
La puissance volumique cédée à la matière est

$$p(r,t) = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{E^2}{\gamma}$$

soit

$$p(r,t) = \frac{B_0^2\omega^2}{4\gamma} r^2 \sin^2(\omega t)\,.$$

En moyenne temporelle, on a

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{B_0^2\omega^2}{8\gamma^2} r^2}\,.$$

On intègre sur tout le volume pour la puissance moyenne totale :

$$\langle P \rangle = \int_0^R \langle p \rangle 2\pi r L\,\mathrm{d}r = \frac{B_0^2\omega^2}{4\gamma^2}\pi L \frac{R^4}{4}$$

soit

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{B_0^2 \pi L R^4}{16\gamma^2}\omega^2}\,.$$

3. On a une distribution de courant $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$, qui présent les mêmes propriétés de symétrie et d'invariance que le solénoïde infini.

Le plan $(M;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ étant un plan de symétrie, le champ magnétique créé est normal à ce plan, donc $\vec{B}_\mathrm{i} = B(r,t)\vec{e}_z$.

On utilise le théorème d'Ampère, en choisissant comme contour un rectangle de longueur ℓ arbitraire, dont un côté parallèle à Oz est distant de $r < R$ cet axe, l'autre côté étant à l'extérieur du cylindre.

Le théorème d'Ampère s'écrit alors

$$B_\mathrm{i}\ell = \mu_0 \int_r^R j(r',t)\ell\,\mathrm{d}r' = \mu_0 \frac{B_0\gamma\omega}{2}\sin(\omega t)\int_r^R r'^2\,\mathrm{d}r'$$

soit

$$\boxed{\vec{B}_\mathrm{i} = \frac{\mu_0 B_0\gamma\omega}{4}(R^2 - r^2)\sin(\omega t)\,\vec{e}_z}\,.$$

L'amplitude de ce champ est maximale au centre et vaut

$$B_{\mathrm{i,\,max}} = \frac{\mu_0\gamma\omega}{4}R^2 B_0\,.$$

Ce champ est négligeable si $B_{\mathrm{i,\,max}} \ll B_0$, soit si

$$\boxed{R \ll \frac{2}{\sqrt{\mu_0\gamma\omega}}}\,.$$

On reconnaît en ordre de grandeur l'épaisseur de peau δ : si $R \ll \delta$, on peut négliger la décroissance des champs du champ magnétique dans le cylindre et le considérer comme uniforme. La décroissance de $\vec{B}$ quand on pénètre dans le conducteur étant dû à la superposition du champ appliqué et du champ induit créé, le champ magnétique est uniforme si on peut négliger le champ induit.

4. On a vu que le champ $\vec{B}$ engendrait des courants induits, appelés courants de Foucault, qui cèdent une puissance volumique moyenne $\langle p\rangle \propto r^2$. En l'absence de diffusion thermique, on a donc un profil de température qui augmente du centre vers les bords du cylindre, d'allure parabolique.

Par analyse dimensionnelle à partir de l'équation de la chaleur, on a un temps caractéristique $T^* \approx \dfrac{\mu c}{\lambda}R^2$. C'est bien sûr le rayon du cylindre qu'il faut prendre en compte et non sa longueur, le gradient de température étant radial.

7 — Courants de Foucault

1. On utilise un solénoïde parcouru par un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$; on obtient

$$\vec{B}(t) = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)\,\vec{e}_z = B_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_z\,.$$

2. D'après Maxwell-Faraday, on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

On a donc un champ électrique induit de rotationnel non nul, donc à circulation non conservative.

On coordonnées cylindriques, le plan $(M;\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants du solénoïdes, donc $\vec{E}(M,t) = E(M,t)\vec{e}_\theta$.

La distribution étant invariante par translation selon Oz et par rotation autour de Oz, on en conclut

$$\vec{E}(M,t) = E(r,t)\,\vec{e}_\theta\,.$$

On prend comme contour Γ un cercle d'axe Oz, de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$.

La forme intégrale de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\oint_\Gamma \vec{E}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_M = -\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,,$$

soit

$$2\pi E(r,t) = B_0\omega\sin(\omega t)\pi r^2\,,$$

d'où

$$\boxed{E(r,t) = \frac{B_0\omega}{2}r\sin(\omega t)}\,.$$

De la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ on déduit

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\sigma B_0\omega}{2}r\sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta}\,.$$

3. Puissance volumique : $p(t) = \vec{j}\cdot\vec{E}$ soit

$$\boxed{p(r,t) = \sigma\frac{B_0^2\omega^2}{4}r^2\sin^2(\omega t)}\,.$$

La puissance volumique n'étant pas uniforme mais ne dépendant que de r, on découpe en tube élémentaire de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi Lr\,\mathrm{d}r$ pour calculer la puissance totale :

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^a 2\pi Lr\,p(r,t)\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi L\sigma\frac{B_0^2\omega^2}{4}r^2\sin^2(\omega t)\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{P(t) = \frac{\pi L\sigma B_0^2}{8}\omega^2 a^4\sin^2(\omega t)}\,.$$

La puissance moyenne totale vaut

$$\boxed{\langle P\rangle = \frac{\pi L\sigma B_0^2}{16}\omega^2 a^4}\,.$$

4. Le volume total s'écrit $V = L\pi a^2 = NL\pi a'^2$, d'où

$$\boxed{a'^2 = \frac{a^2}{N}}\,.$$

La puissance moyenne consommée par les N cylindres s'écrit

$$\langle P'\rangle = N\frac{\pi L\sigma B_0^2}{16}\omega^2 a'^4 = N\frac{\pi L\sigma B_0^2}{16}\omega^2\frac{a^4}{N^2},$$

soit $\boxed{\langle P'\rangle = \frac{\langle P\rangle}{N}}$.

On a $\langle P'\rangle < \langle P\rangle$, et même $\langle P'\rangle \ll \langle P\rangle$ si N est grand.

8 — Décharge d'une boule conductrice

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R, porte initialement la charge Q_0, uniformément répartie en surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ. À l'instant t, la boule porte la charge $Q(t)$.
On cherche à déterminer le champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre O.

1. La sphère se décharge dans l'air conducteur. Le problème étant à symétrie sphérique, les charges sont émises par la sphère de façon isotrope. En coordonnées sphériques, la densité de courant correspondante s'écrit donc

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r\,.$$

Le plan $(M;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie, donc $B_r = 0$ et $B_\theta = 0$.
Le plan $(M;\vec{e}_r,\vec{e}_\phi)$ est un plan de symétrie, on a de plus $B_\phi = 0$.
On a donc $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$.

2. En reprenant les plans de symétries précédents, on obtient un champ électrique de la forme

$$\vec{E}(M,t) = E(r,t)\,\vec{e}_r\,.$$

Le champ magnétique étant nul, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{0} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

soit comme $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, et en projetant selon $\vec{e}_r$:

$$E(r,t) + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}\frac{\partial E(r,t)}{\partial t} = 0\,.$$

On en déduit $E(r,t) = E(r,0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$. On détermine $E(r,0)$ en appliquant le théorème de Gauss à l'instant initial. Initialement la charge Q_0 est portée par la charge ; en considérant la sphère de rayon r, on a

$$4\pi r^2 E(r,t) = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$

d'où

$$E(r,0) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

On a donc

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}\,.$$

3. Écrivons la variation de la charge de la sphère pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}Q = -4\pi R^2 j(R,t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -4\pi R^2 j(R,t) = -4\pi R^2\gamma E(R,t)\,.$$

D'après le théorème de Gauss, on a $4\pi R^2 E(R,t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$, d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}Q(t)}\,.$$

La résolution conduit à

$$\boxed{Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t}}\,.$$

La boule se décharge avec la constante de temps $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$. Elle se décharge donc d'autant plus rapidement que l'air est conducteur (γ grand). C'est le cas quand l'air est humide.

4. Le champ électrique cède la puissance volumique $\vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma\vec{E}^2$ à la matière. La puissance totale dissipée dans l'air à l'instant t vaut donc

$$\mathcal{P} = \int\gamma E^2(M,t)\,\mathrm{d}\tau = \gamma\int_R^\infty E^2(r,t)4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0^2}Q^2(t)\int_R^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{Q^2(t)}{R}\,.$$

L'énergie totale cédée à la matière pendant la décharge de la boule vaut

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty\mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0^2 R}Q_0^2\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\frac{2\gamma t}{\varepsilon_0}}\,\mathrm{d}t\,,$$

soit

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}}\,.$$

Cette énergie a été perdue par le champ électromagnétique. On peut donc aussi la calculer à partir de la variation de l'énergie totale portée par le champ lors de la décharge de la boule. Le champ magnétique étant nul, la densité volumique d'énergie s'écrit

$$w(r,t) = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2(r,t) = \frac{\gamma Q_0}{16\pi^2\varepsilon_0 r^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\gamma t}{\varepsilon_0}}\,.$$

L'énergie totale contenue dans le champ extérieur à la boule s'écrit

$$W(t) = \int_R^\infty w(r,t)4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{2\gamma t}{\varepsilon_0}\right)\int_R^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

soit $W(t) = \dfrac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\exp\left(-\dfrac{2\gamma t}{\varepsilon_0}\right)$.

La variation d'énergie portée par le champ pendant toute la durée de la décharge de la boule vaut

$$\Delta W = W(\infty) - W(0) = -\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

On a bien $\Delta W = -\mathcal{E}$: l'énergie perdue par le champ a été cédée à la matière.

9 — Courant induit dans un cadre

En coordonnées cylindriques, le champ magnétique créé par le fil est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta.$$

Notons $x(t)$ la distance du côté du cadre le plus proche du fil. On a

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Le flux du champ magnétique à travers le cadre à l'instant t vaut

$$\Phi(t) = \int_{x(t)}^{x(t)+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{x(t)+a}{x(t)}\right)$$

On calcule

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{x'(t)}{a+x(t)} - \frac{x'(t)}{x(t)}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{v}{a+x(t)} - \frac{v}{x(t)}\right] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{av}{[a+x(t)]x(t)}.$$

La f.é.m. induite dans le cadre est donnée par la loi de Faraday

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

On en déduit le courant induit par $e(t) = Ri(t)$, où R est la résistance du cadre, soit

$$i(t) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\frac{av}{[a+x(t)]x(t)}$$

10 — Diffusion du champ magnétique

1. En négligeant le courant de déplacement, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu_0\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}.$$

Comme $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ d'une part et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ d'autre part, on a

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial}.$$

Avec $\vec{B} = B(z,t)\vec{e}_x$, on en déduit en projection selon $\vec{e}_x$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \mu_0\gamma\frac{\partial B}{\partial t}}.$$

L'évolution du champ magnétique dans le conducteur est régie par l'équation de la diffusion.

Le champ magnétique variable crée un champ électrique induit $\vec{E}$ ce qui donne naissance à des courants $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Ces courants sont eux-mêmes sources d'un champ magnétique qui « s'oppose » aux variations du champ magnétique imposés (loi de Lenz). Le résultat se traduit par une diffusion : le champ magnétique n'est pas modifié instantanément dans tout le conducteur, mais la variation imposée en $z = 0$ diffuse lentement dans le milieu.

2. On a d'une part

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{z}{2t\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}$$

et d'autre part

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}$$

d'où en dérivant de même une seconde fois

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}u^2}.$$

L'équation de la diffusion s'écrit alors

$$\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}u^2} = -\mu_0\gamma\frac{z}{2t\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}u^2} = -\mu_0\gamma\frac{z}{2\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u} = -\frac{\mu_0\gamma}{2}u\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}.$$

On a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}u^2} = f(u)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}} \quad \text{avec} \quad \boxed{f(u) = -\frac{\mu_0\gamma}{2}u}.$$

En posant $F(u) = \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = f(u)F.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}F}{\beta} = f(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\mu_0\gamma}{2}u\,\mathrm{d}u.$$

Intégrons :

$$\ln F = -\frac{\mu_0\gamma}{4}u^2 + A$$

soit

$$F(u) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu_0\gamma}{4}u^2},$$

en posant $\lambda = \mathrm{e}^A$. On a donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\alpha^2u^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = \frac{\sqrt{\mu_0\gamma}}{2}}.$$

3. À $t \to 0^+$, juste après la modification du champ extérieur, on a $B(z,0) = B_0$ pour $z > 0$. La limite $t \to 0^+$ correspond à $u \to \infty$, d'où $B(z,0) = b(+\infty) = B_0$.

Le champ magnétique diffuse dans le milieu conducteur, jusqu'à arriver à une situation où le champ est uniforme, égal au champ B_1 imposé en $z = 0$; on a donc $B(z, t \to \infty) = B_1$. La limte $t \to +\infty$ correspond à $u \to 0$, soit $B(z,+\infty) b(0) = B_1$.

De la relation précédente, on déduit

$$\int_{B_1}^{B_0} \mathrm{d}b = \lambda \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2 u^2}\, \mathrm{d}u .$$

En posant $u' = \alpha u$, on calcule

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2 u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u'^2}\, \mathrm{d}u' = \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'où

$$B_0 - B_1 = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

On a donc

$$\boxed{\lambda = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (B_0 - B_1)} .$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} (B_0 - B_1)\, \mathrm{e}^{-\alpha^2 u^2} .$$

4. Avec $\vec{B} = B(z,t)\,\vec{e}_x$, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_y = \mu_0 \vec{j} .$$

On a donc

$$\mu_0 \vec{j} = \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_y = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi t}} (B_0 - B_1)\, \mathrm{e}^{-\alpha^2 u^2}\, \vec{e}_y .$$

Les courants volumiques sont donc donnés par

$$\boxed{\vec{j}(z,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu_0 \pi}} \frac{(B_0 - B_1)}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \gamma z^2}{4t}\right) \vec{e}_y} .$$

5. On peut fait une analogie avec la diffusion thermique ou avec la diffusion de particules.

11 — Ça chauffe !

Entre deux sphères concentriques de rayons $R_1 < R_2$ se trouve un conducteur ohmique de conductivité γ. Initialement, une charge Q est uniformément répartie à la surface de la sphère intérieure. À $t = 0$ on inflige un décharge créant le courant $\vec{j} = j(r,t)\,\vec{e}_r$ dans le conducteur et la charge Q se déplace sur la sphère extérieure.

1. La loi d'Ohm locale est

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}} .$$

Elle est valable pour des fréquences pas trop élevées.

2. Avant la décharge, on a une sphère de rayon R_1 qui porte une charge Q. C'est un problème à symétrie sphérique qui se résout à l'aide du théorème de Gauss :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > R_1 . \end{cases}$$

Il n'a aucun courant et le champ électrique est stationnaire donc $\vec{B}(M) = \vec{0}$.

Après la décharge, on a une sphère de rayon R_1 qui porte une charge Q. On a donc de même

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

et $\vec{B}(M) = \vec{0}$.

3. Pendant la décharge, on a une densité de courant radiale $\vec{j}(M) = j(r)\,\vec{e}_r$.

Se reporte à l'exercice 5 : $\vec{B}$ est nul partout et tout le temps.

4. Avec $\vec{B} = \vec{0}$, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{0} ,$$

d'où

$$\vec{E} + \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} .$$

Pendant la décharge, le champ entre les armatures est donné par

$$\vec{E}(M,t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \mathrm{e}^{-t/\tau}\, \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} .$$

5. La densité d'énergie entre les armatures est

$$w(M,t) = \frac{\varepsilon_0 E^2(r,t)}{2}$$

soit

$$w(M,t) = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}\, \mathrm{e}^{-2t/\tau} .$$

Elle varie entre

$$w(M,0) = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \quad \text{et} \quad w(M, t \gg \tau) \approx 0 .$$

12 — Faisceau de particules α

1. La densité volumique de charge dans le faisceau est

$$\rho = 2en\,.$$

La distribution est à symétrie cylindrique, d'où en coordonnées cylindriques

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r\,.$$

On applique le théorème de Gauss en prenant un cylindre de hauteur h et de rayon r :

$$2\pi r h E(r) = \begin{cases} h\frac{\pi r^2}{\varepsilon_0}2en & \text{pour } r \leqslant R \\ h\frac{\pi R^2}{\varepsilon_0}2en & \text{pour } r > R \end{cases}$$

d'où

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{en}{\varepsilon_0}r\,\vec{e}_r & \text{pour } r \leqslant R \\ \frac{en}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\,\vec{e}_r & \text{pour } r > R \end{cases}$$

2. La densité volumique de courant dans le faisceau est

$$\vec{\jmath} = \rho\,\vec{v} = 2env\,\vec{e}_z\,.$$

Le champ magnétique est de la forme

$$\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta\,.$$

On applique le théorème d'Ampère en prenant un cercle de rayon r orienté selon $\vec{e}_\theta$:

$$2\pi r B(r) = \begin{cases} \mu_0\pi r^2 2env & \text{pour } r \leqslant R \\ \mu_0\pi R^2 2env & \text{pour } r > R \end{cases}$$

d'où

$$\vec{B}(M) \begin{cases} \mu_0 envr\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r \leqslant R \\ \mu_0 env\frac{R^2}{r}\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r > R \end{cases}$$

On remarque que l'on peut écrire

$$\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 v E(r)\,\vec{e}_\theta = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{v}\wedge\vec{E}\,.$$

Avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, on obtient

$$\vec{B}(M) = \frac{\vec{v}\wedge\vec{E}(M)}{c^2}\,.$$

3. Dans le référentiel des particules α, la densité volumique de charge ρ est inchangée, mais les charges étant au repos dans ce référentiel, on a $\vec{\jmath} = \vec{0}$.
On en déduit que le champ $\vec{E}(M)$ est inchangé, tandis que $\vec{B}(M) = \vec{0}$.
Le problème de la vision galiléenne des changements de référentiels que nous avons adopté. Les équations de Maxwell sont par nature relativistes; il faut donc utiliser les transformations de Lorentz (relativité) pour changer de référentiel. Cependant, nous sommes dans le cas où $v \ll c$. Les formules de changement de référentiel s'écrivent alors

$$\vec{E}' = \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\wedge\vec{E}\,.$$

4. La force volumique de Lorentz s'écrit

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{\jmath}\wedge\wedge\vec{B} = \rho\vec{E} + \frac{\vec{\jmath}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{E})}{c^2}\,.$$

On donne la formule du double produit vectoriel (utile à connaître) :

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})\,.$$

Elle donne ici

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{v}\frac{(\vec{\jmath}\cdot\vec{E})}{c^2} - \vec{E}\frac{(\vec{\jmath}\cdot\vec{v})}{c^2}\,.$$

On a ici j $\cdot\,\vec{E} = 0$ et $\vec{\jmath}\cdot\vec{v} = \rho v^2$, d'où

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} - \rho\frac{v^2}{c^2}\vec{E}\,.$$

La force volumique électromagnétique s'écrit donc

$$\boxed{\vec{f}_L = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)E(r)\,\vec{e}_r}\,.$$

Elle est radiale, dirigée vers l'extérieur ($v \ll c$) ; elle tend donc à faire diverger le faisceau.

5. Avec $v^2 \ll c^2$ (faisceau non relativiste), on peut négliger la part magnétique de la force et l'assimiler à

$$\vec{f}_L = \rho E(r)\,\vec{e}_r\,.$$

On considère une « portion » du faisceau, de longueur h et d'angle $d\theta$ (comme une part de gâteau vue de coupe !).
On la découpe en secteurs élémentaires de volume

$$d\tau = hr\,dr\,d\theta\,,$$

qui subissent la force

$$d\vec{F}_L = \rho E(r) hr\,dr\,d\theta\,\vec{e}_r = \frac{2e^2n^2}{\varepsilon_0}hr^2\,dr\,d\theta\,\vec{e}_r\,.$$

On obtient la force électrique sur la portion complète en intégrant :

$$\vec{F}_L = \frac{2e^2n^2}{\varepsilon_0}h\,d\theta\int_0^R r^2\,dr\,\vec{e}_r = \frac{2e^2n^2hR^3}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r\,.$$

La force de pression s'exerçant sur la face extérieure de la portion d'aire $dS = hR\,d\theta$ est

$$\vec{F}_p = -p_0 hR\,d\theta\,\vec{e}_r\,.$$

Le faisceau est stable pour $\vec{F}_L + \vec{F}_p = \vec{0}$, d'où

$$p_0 = \frac{2e^2n^2R^2.}{3\varepsilon_0}$$