

# Électromagnétisme

# V — Milieux magnétiques

## 1 — Aimant permanent

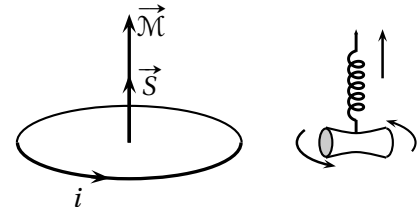
### 1.1 Carte de champ magnétique

Diaporama T1, T2 et T3 : une spire à grande distance crée un champ magnétique similaire à ce lui créé par un aimant permanent. On va utiliser pour l'aimant la même description que pour une spire.

### 1.2 Moment magnétique

Le moment magnétique d'une spire de surface  $S$  parcourue par un courant d'intensité  $i$  est défini par

$$\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}$$

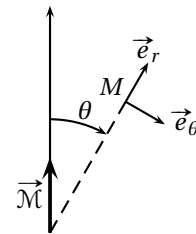


où  $\vec{S}$  est le vecteur surface de la spire, orienté par le sens du courant.

- $|\vec{\mathcal{M}}|$  s'exprime en  $A \cdot m^2$ .
- Le moment magnétique est un vecteur axial.

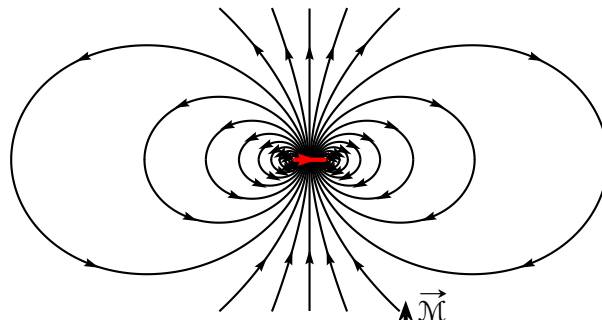
On peut calculer le champ magnétique créé par une spire de rayon  $a$ , de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{e}_z$  en coordonnées sphériques, pour  $r \gg a$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

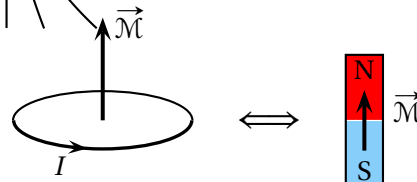


- Discuter des symétries : plan de la figure,  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ,  $\theta = \pi/2$ .

On donne l'allure de la carte de champ :



On définit donc le moment magnétique d'un aimant.



### 1.3 Ordres de grandeur

Bobine de 1000 spires,  $I = 1 A$ ,  $S = 1 \times 10^{-4} m^2$  : on a  $\mathcal{M} \approx 0,1 A \cdot m^2$ .

Terre :  $\mathcal{M} \approx 10^{23} A \cdot m^2$ . Champ magnétique terrestre :  $B \approx 50 \mu T$ .

### 1.4 Actions subies par un dipôle magnétique

On place un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$ .

Expressions fournies

Énergie potentielle :  $\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$ .

Moment :  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$ .

Résultante :  $\vec{F} = \text{grad}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext})$ .

- Le moment tend à aligner  $\vec{\mathcal{M}}$  avec  $\vec{B}_{\text{ext}}$  : discussion avec le moment, et avec la courbe d'énergie potentielle pour la stabilité.
- Dans une zone de champ uniforme, la résultante est nulle.
- Dans une zone de champ non uniforme, la résultante déplace le dipôle dans les zones de champ magnétique plus intense : la composante de la résultante est du signe de  $\frac{dB_{\text{ext}}}{dx}$  pour un champ selon  $\vec{e}_x$ .

Application : la boussole.

## 2 — Magnéton de Bohr

Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène : électron avec orbite circulaire.

Intensité :  $I = -\frac{e}{T}$  avec  $2\pi r = vT$ , soit  $I = -\frac{ev}{2\pi r}$ .

Le moment magnétique est  $\vec{\mathcal{M}} = I\pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{evr}{2} \vec{u}_z$ .

On fait le lien avec le moment cinétique et le modèle de Bohr. On a  $\vec{L} = mr \vec{u}_r \wedge v \vec{u}_\theta = mr v \vec{u}_z$

Modèle de Bohr :  $\vec{L} = n\hbar \vec{u}_z$  avec  $n$  entier, d'où  $mr v = n\hbar$ .

On en déduit  $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{en\hbar}{2m} \vec{u}_z$  soit  $\vec{\mathcal{M}} = -n \frac{e\hbar}{2m} \vec{u}_z$ .

Magnéton de Bohr :  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ .

- La magnéton de Bohr joue le rôle de quantum de moment magnétique pour l'électron.
- On a  $\mu_B = 9,274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

## 3 — Equations de Maxwell dans un milieu magnétique (dans l'ARQS)

### 3.1 Aimantation d'un milieu

Le volume élémentaire  $d\tau$  d'un milieu magnétique possédant le moment magnétique  $\delta\vec{\mathcal{M}}$ , on définit l'aimantation  $\vec{M}$  du milieu par

$$\vec{M} = \frac{\delta\vec{\mathcal{M}}}{d\tau}.$$

- Le champ d'aimantation du milieu est un vecteur axial dont l'intensité s'exprime en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 3.2 Courants d'aimantation

Au niveau atomique, le moment orbital d'un électron est source d'un champ magnétique (moment magnétique atomique). On peut considérer le moment de l'électron comme un « courant lié » à l'atome (au contraire des courants de conduction, dus à des charges libres). Au niveau mésoscopique, il existe un moment magnétique  $\delta\vec{\mathcal{M}}$  pour un volume  $d\tau$  auquel on associe une aimantation  $\vec{M}$ .

**Résultat admis :** à une distribution d'aimantation, on associe une densité de courants liés équivalente  $\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot } \vec{M}$

- La notion de « courants » est une image ; l'aimantation a des sources d'origine quantique : spin de l'électron, spin nucléaire.

### 3.3 Excitation magnétique et équation de Maxwell-Ampère

Maxwell-Ampère dans l'ARQS :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

La densité de courant  $\vec{j}$  décrit toutes les sources du champ magnétique : les courants de conduction mais aussi l'aimantation de la matière, soit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}}).$$

D'après le résultat admis précédent, on a  $\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot } \vec{M}$ , d'où

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \text{rot } \vec{M}.$$

On peut écrire

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{\text{libre}}.$$

On définit le vecteur excitation magnétique d'un milieu d'aimantation  $\vec{M}$  par

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

Dans l'ARQS magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique s'écrit

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}}.$$

► **Les sources de l'excitation magnétique sont les courants électriques libres.**

► **Les sources du champ magnétique sont les courants électriques libres et l'aimantation.**

Dans un milieu non magnétique, on a  $\vec{M} = \vec{0}$ , et  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ; on retrouve l'équation de Maxwell-Ampère « habituelle ».

## Équations de Maxwell dans un milieu magnétique

Dans un milieu magnétique, dans le cadre de l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell s'écrivent

<b>Maxwell-Thomson</b>	$\operatorname{div} \vec{B}(P, t) = 0$	<b>Maxwell-Gauss</b>	$\operatorname{div} \vec{E}(P, t) = \frac{\rho(P, t)}{\epsilon_0}$
<b>Maxwell-Faraday</b>	$\operatorname{rot} \vec{E}(P, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(P, t)$	<b>Maxwell-Ampère</b>	$\operatorname{rot} \vec{H}(P, t) = \vec{J}_{\text{libre}}(P, t)$

► *A priori*  $\rho = 0$  dans un milieu magnétique et l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ .

► **Le champ magnétique est à flux conservatif** :  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

### 3.4 Théorème d'Ampère dans un milieu magnétique

Dans un milieu magnétique, le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{H}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = I_{\text{libre, enlacé}}$$

### 3.5 Induction en présence de milieu magnétique

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit avec le champ magnétique  $\vec{B}$ .

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est

$$e(t) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

**La loi de Faraday s'écrit toujours avec le flux du champ magnétique.**

## 4 — Milieu ferromagnétique

### 4.1 Définition

Aux équations de Maxwell, il faut ajouter des relations constitutives du matériau (pour la conduction électrique,  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  par exemple).

Dans le cas d'un milieu magnétique, on peut relier  $\vec{M}$  à  $\vec{H}$  ou  $\vec{B}$  à  $\vec{H}$ .

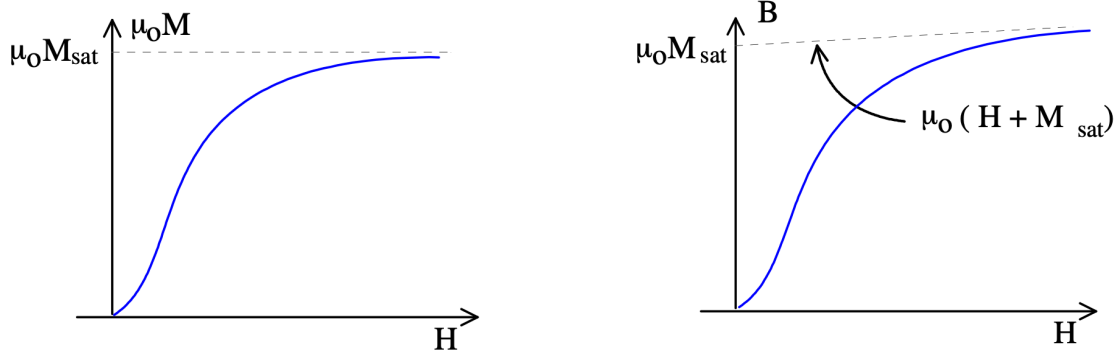
Les matériaux ferromagnétiques sont caractérisés par l'existence de moments magnétiques microscopiques permanents qui interagissent fortement. Un tel matériau est susceptible d'avoir une aimantation permanente en l'absence d'une excitation magnétique appliquée.

Ex : fer, cobalt, nickel et des alliages.

## 4.2 Courbe de première aimantation

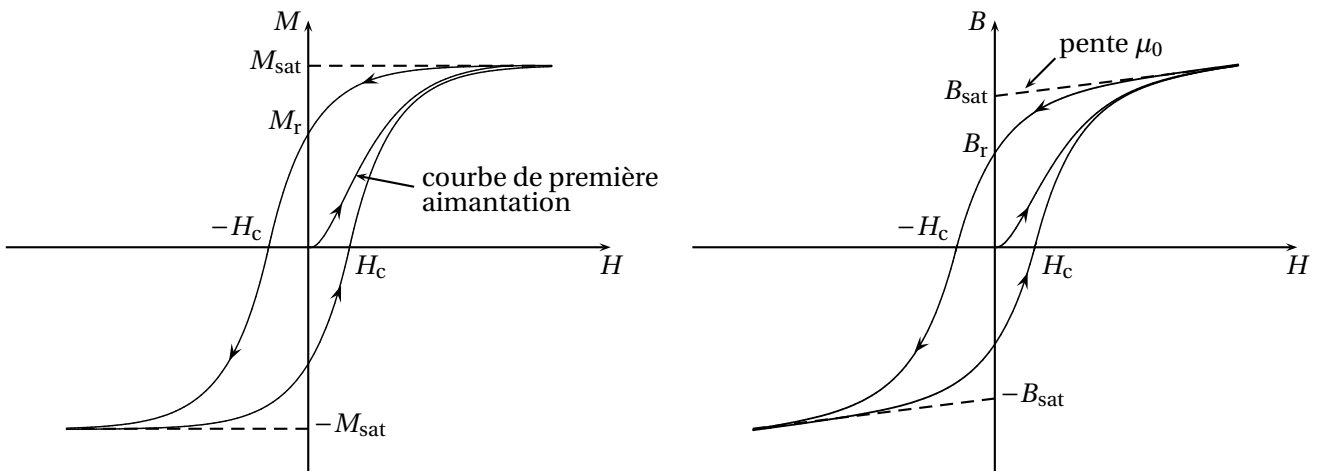
On considère un matériau ferromagnétique dépourvu d'aimantation. On applique une excitation magnétique : par exemple, le matériau est placé dans une bobine dans laquelle on envoie un courant  $I$ .

Au départ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  : couple qui tend à aligner les dipôles microscopiques avec l'excitation imposée, mais agitation thermique qui s'oppose. Plus l'excitation est forte, plus l'ordre l'emporte sur l'agitation thermique.



- Saturation quand tous les dipôles microscopiques sont alignés. Typiquement  $M_{\text{sat}} \approx 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- Dans la pratique,  $\mu_0 H \ll \mu_0 M_{\text{sat}}$ , et  $B \approx \mu_0 M$ .  
En effet :  $\mu_0 M_{\text{sat}} \approx 1,5 \text{ T}$ . Solénoïde :  $\mu_0 H = \mu_0 n I \approx 10^{-2} \text{ T}$ .

## 4.3 Cycle d'hystérésis



**Aimantation de saturation :** aimantation maximum  $M_{\text{sat}}$  que peut acquérir le matériau.

**Aimantation rémanente :** aimantation  $M_r$  qui demeure quand l'excitation magnétique est nulle (on a alors un aimant permanent). Le champ magnétique rémanent  $B_r$  est le champ magnétique créé par l'aimantation en l'absence d'excitation.

**Excitation coercitive :** excitation  $H_c$  qui annule l'aimantation.

On distingue deux types de matériaux ferromagnétiques :

**Matériaux durs :** l'aire du cycle est du même ordre de grandeur que l'aire du rectangle. L'aimantation rémanente  $B_r$  et l'excitation coercitives sont élevées ( $H_c > 10^4 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

**Matériaux doux :** l'aire du cycle est faible comparée à l'aire du rectangle dans lequel il s'inscrit. L'aimantation rémanente  $B_r$  et l'excitation coercitives sont faibles ( $H_c \approx 10 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

- Les matériaux ferromagnétiques durs sont utilisés pour créer des aimants permanents. Exemples : aciers, ferrites, alliage néodyme-fer-bore.  
Exemples : ferrites ( $B_r = 0,2$  à  $0,4 \text{ T}$  et  $H_c = 200 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-1}$ ), néodyme ( $B_r = 1,3 \text{ T}$  et  $H_c = 1500 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-1}$ ).
- Les matériaux ferromagnétiques doux sont utilisés comme noyaux dans les transformateurs. Exemples : fer, cobalt, nickel.

### 4.4 Milieu ferromagnétique doux

On modélise le cycle très étroite autour de l'origine (loin de la saturation) par une droite, ce qui correspond à une relation  $B(H)$  linéaire :

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu (en  $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et sa perméabilité relative (sans dimension).

►  $\mu_r$  est très élevée pour un ferromagnétique, typiquement  $10^5$ .

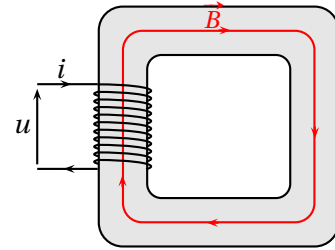
### 5 — Circuit magnétique sans entrefer

On considère une bobine de  $N$  spires, parcourue par un courant d'intensité  $i$ , enroulée autour d'un noyau ferromagnétique de section  $S$ , de longueur moyenne  $\ell$  et de perméabilité magnétique  $\mu_r \gg 1$ .

Les lignes de champ magnétique sont canalisées par le noyau ferromagnétique, qui se comporte donc comme un tube de champ. On en déduit que **le flux de  $\vec{B}$  est le même à travers toute section du noyau de fer.**

Modèle sans fuite : on suppose que les lignes de champ magnétique sont canalisées par le matériau ferromagnétique qui se comporte comme un tube de champ magnétique.

► On suppose  $\sqrt{S} \ll \ell$  : les champs  $B$  et  $H$  sont considérés comme uniformes sur toute section droite du noyau.



**Théorème d'Ampère :**  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H\ell = Ni$ , d'où  $H = \frac{Ni}{\ell}$ .

### 6 — Circuit magnétique avec entrefer : électroaimant

On reprend la configuration précédent, mais le noyau de fer possède un **entrefer** d'épaisseur  $e \ll \ell$ , longueur du matériau ferromagnétique.

**On admet que les ligne de champ sortent orthogonalement à l'interface dans l'entrefer.**

Dans l'entrefer :  $B_{\text{air}}$  et  $H_{\text{air}}$ .

Dans le circuit magnétique :  $B_{\text{fer}}$  et  $H_{\text{fer}}$ .

**Champ magnétique.** Conservation du flux, soit  $S B_{\text{air}} = S B_{\text{fer}}$ . On a donc  $B_{\text{fer}} = B_{\text{air}}$ .

**Excitation magnétique.** Théorème d'Ampère :

$$H_{\text{fer}} \ell + H_{\text{air}} e = Ni. \quad \text{soit} \quad \frac{B_{\text{air}}}{\mu_0 \mu_r} \ell + \frac{B_{\text{air}}}{\mu_0} e = Ni.$$

On en déduit  $B_{\text{air}} = \frac{\mu_0 N i}{e + \frac{\ell}{\mu_r}}$ .

Comme  $\mu_r \gg 1$ , on peut considérer  $e + \frac{\ell}{\mu_r} \approx e$ , et  $B_{\text{air}} \approx \frac{\mu_0 N i}{e}$ .

► Un entrefer étroit permet d'obtenir un champ magnétique intense.

Exemple :  $N = 1000$  spires ;  $i = 1$  A et  $e = 5$  mm ; on obtient  $B = 0,25$  T.

### 7 — Inductance propre d'une bobine à noyau de fer doux linéaire

Milieu doux non saturé :  $B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r N}{\ell} i$ .

**Inductance propre :**  $\Phi = NBS = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell} i$ , d'où  $L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell}$ .

► On pourra noter que la position du bobinage n'a aucune influence sur le champ magnétique, seuls le nombre de spires et le courant les traversant interviennent dans l'équation.

On a  $L = \mu_r L_{\text{air}} \gg L_{\text{air}}$  : l'utilisation d'un circuit magnétique augmente considérablement l'inductance de la bobine.

### Énergie magnétique

Ré.m. induite dans la bobine :  $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt}$ . La tension aux bornes de la bobine est donc

$$u(t) = -e(t) = NS\frac{dB}{dt}.$$

La bobine reçoit la puissance

$$p(t) = u(t)i(t) = NS\frac{dB}{dt}\frac{\ell H}{N} = S\ell H\frac{dB}{dt}.$$

En notant  $\mathcal{V} = S\ell$  le volume du circuit magnétique, on a  $p(t) = \mathcal{V}H\frac{dB}{dt}$ .

Milieu linéaire :  $B = \mu_0\mu_r H$ , d'où

$$p(t) = \mathcal{V}\frac{B}{\mu_0\mu_r}\frac{dB}{dt} = \mathcal{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\right) = \mathcal{V}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}.$$

La densité volumique d'énergie magnétique dans le milieu ferromagnétique doux loin de la saturation (ferromagnétique linéaire) est  $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$ .

L'énergie magnétique du circuit est  $\mathcal{E}_m = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau$ .

## 8 — Pertes d'une bobine réelle à noyau

On a montré que la puissance reçue par la bobine est

$$p(t) = \mathcal{V}H\frac{dB}{dt}.$$

Une bobine réelle n'est pas linéaire :  $H(B)$  décrit un cycle d'hystérésis.

Sur une période  $T$ , pendant laquelle un cycle est parcouru, l'énergie dissipée vaut

$$\mathcal{E} = \int_0^T p(t) dt = \mathcal{V} \oint_{\text{cycle}} H dB = \mathcal{V}\mathcal{A}$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'aire du cycle.

La puissance moyenne vaut donc

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \text{soit} \quad \langle P \rangle = f\mathcal{V} \oint_{\text{cycle}} H dB = \mathcal{V}f\mathcal{A}.$$

### Bilans sur les pertes

On distingue deux types de pertes :

**Pertes cuivres** : ce sont les pertes par effet Joule dans les fils de cuivre de la bobine.

**Pertes fer** : ce sont les pertes localisées dans le noyau ferromagnétique. Les pertes fer sont de deux nature :

- **Pertes par courant de Foucault**. Le champ magnétique variable entraîne l'apparition de courants de Foucault induits dans le noyau de fer, qui dissipent de l'énergie par effet Joule. On limite ces pertes en feuilletant le noyau en minces couches isolées électriquement.
- **Pertes par hystérésis**, dues au caractère non linéaire du matériau ferromagnétique. On limite les pertes par hystérésis en utilisant un milieu doux de très petit cycle.