Électromagnétisme **Bilan d'énergie électromagnétique**

1 — Bilan global d'énergie

1.1 Écriture générale

On considère une région de l'espace, de volume $\mathcal{V}$, délimitée par une surface fermée Σ, dans laquelle règne un champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right]$. Ce domaine contient une énergie électromagnétique $U_{\text{em}}(t)$.
Pendant une durée $\mathrm{d}t$, le champ électromagnétique peut perdre de l'énergie :

— par rayonnement vers l'extérieur à travers la frontière Σ ;

— en la cédant à la matière contenue dans $\mathcal{V}$.

On note $\mathcal{P}_{\text{rayonnée}}$ et $\mathcal{P}_{\text{cédée}}$ les puissances rayonnée à travers Σ et cédée à la matière intérieure à Σ.

Le bilan d'énergie électromagnétique s'écrit sous la forme générale

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} - \mathcal{P}_{\text{cédée}}. \tag{1}$$

➤ La surface fermée Σ étant conventionnellement orientée vers l'extérieur, une puissance rayonnée positive est *perdue* par le champ électromagnétique intérieur à Σ, d'où le signe « – ».

➤ Une puissance cédée positive, $\mathcal{P}_{\text{cédée}} > 0$, correspond à une puissance *reçue* par la matière à l'intérieur de Σ, donc *perdue* par le champ électromagnétique, d'où le signe « – ».

1.2 Énergie portée par le champ

Le champ possède une énergie électromagnétique, répartie là où règne le champ avec une densité volumique $u_{\text{em}}(M,t)$. L'énergie électromagnétique totale portée par le champ contenu dans le volume $\mathcal{V}$ s'écrit donc

$$U_{\text{em}}(t) = \iiint_{M\in\mathcal{V}} u_{\text{em}}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M.$$

1.3 Puissance cédée à la matière

Le champ cède de l'énergie à la matière sous l'effet de la force de Lorentz. La puissance cédée au volume $\mathrm{d}\tau_M$ peut s'écrire $\mathrm{d}\mathcal{P}_{\text{cédée}} = p_{\text{cédée}}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M$.
En notant $n(M,t)$ la densité de particules de charge q, animées d'une vitesse v, chaque particule subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$, dont la puissance est $\vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{v}\cdot\vec{E}$.
Le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ contenant $\mathrm{d}n = n(M,t)\,\mathrm{d}\tau$ particules, il reçoit la puissance $\mathrm{d}n(M,t)\vec{F}\cdot\vec{v} = n(M,t)q\vec{v}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$.
On reconnait la densité volumique de charge $\rho(M,t) = qn(M,t)$ et le vecteur densité volumique de courant $\vec{\jmath}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}$; la puissance reçue par le volume $\mathrm{d}\tau$ de matière s'écrit donc $\vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)\,\mathrm{d}\tau$

La puissance volumique cédée à la matière par le champ électromagnétique s'écrit

$$p_{\text{cédée}}(M,t) = \vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t).$$

1.4 Puissance rayonnée

La puissance rayonnée à travers une surface $\mathrm{d}\vec{S}$ s'écrit comme le flux du **vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique**, appelé vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$:

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \vec{\Pi}(M,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_M.$$

➤ L'intensité $\|\vec{\Pi}\|$ du vecteur de Poynting s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

1.5 Formulation intégrale du bilan d'énergie

On reprend l'écriture générale du bilan d'énergie en explicitant chaque terme.
À partir de l'expression de l'énergie totale, on obtient en dérivant par rapport au temps

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

La puissance rayonnée à travers la frontière Σ s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \oiint_{P\in\Sigma} \vec{\Pi}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P\,.$$

La puissance cédée à la matière contenue dans le volume $\mathcal{V}$ s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{cédée}} = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)\mathrm{d}\tau_M\,.$$

Le bilan de puissance (1) s'écrit alors sous la forme intégrale

$$\iiint_{M\in\mathcal{V}} \frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M = -\oiint_{P\in\Sigma} \vec{\Pi}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P - \iiint_{M\in\mathcal{V}} \vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

2 — Identité de Poynting

2.1 Formulation locale du bilan d'énergie électromagnétique

On utilise le théorème d'Ostrogradski pour écrire

$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{\Pi}(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t)\mathrm{d}\tau_M\,.$$

Le bilan sous forme intégrale s'écrit alors

$$\iiint_{M\in\mathcal{V}} \left[\frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) + \vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)\right]\mathrm{d}\tau_M = 0 \quad \forall\mathcal{V}\,.$$

L'intégrale étant nulle quel que soit le volume sur lequel on intègre, l'intégrande est donc identiquement nulle :

$$\frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) + \vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t) = 0 \quad \forall(M,t)\,.$$

On en déduit la forme locale du bilan d'énergie électromagnétique

$$\frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t}(M,t) = -\operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) - \vec{\jmath}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)\,.$$

Nous allons chercher à retrouver cette écriture à partir des équations de Maxwell pour en déduire les expressions de $u_{\mathrm{em}}(M,t)$ et $\vec{\Pi}(M,t)$ par identification.
Nous utiliserons la formule d'analyse vectorielle $\operatorname{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$ avec les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\,.$$

Avec l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ et l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, on obtient

$$\operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\cdot\left(\mu_0\vec{\jmath} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right),$$

soit

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \vec{\jmath}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2}\right) - \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2}\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) - \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,.$$

On identifie avec

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M,t) = -\operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) - \vec{j}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t),$$

soit

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right).$$

On retrouve l'écriture du bilan local d'énergie avec

$$u_{\text{em}} = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.$$

L'équation locale de Poynting traduit le bilan local d'énergie électromagnétique :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M,t) = -\operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) - \vec{j}(M,t)\cdot\vec{E}(M,t)$$

où le vecteur de Poynting est donné par

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0}$$

et la densité volumique d'énergie électromagnétique par

$$u_{\text{em}}(M,t) = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2(M,t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M,t)}{2\mu_0}.$$

Commentaire

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ a été déterminé à partir de son rotationnel, en identifiant $\operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)$.
Cette équation ne permet par de définir $\vec{\Pi}$ de façon unique : il existe une infinité de couples $(\vec{\Pi}, u_{\text{em}})$ qui vérifient le bilan local d'énergie.
Le choix $\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0}$ et $u_{\text{em}}(M,t) = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2(M,t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M,t)}{2\mu_0}$ est usuellement retenu ; il est particulièrement adapté pour décrire la propagation de l'énergie par une onde électromagnétique, mais peut donner des interprétations qui ne semblent pas « naturelles » dans d'autres circonstances.
Le fait que la définition de $\vec{\Pi}$ ne soit pas unique n'est pas gênant (on a vu qu'une énergie potentielle n'est pas définie de façon unique par exemple, mais à une constante près), car seule sa divergence a une sens physique universelle.