Conversion de puissance — I — Puissance électrique en régime sinusoïdal

1 — Puissance moyenne — Facteur de puissance

1.1 Valeurs instantanée, moyenne efficace

Soit $s(t)$ un signal de période T.

Valeur instantanée : $s(t)$ | **Valeur moyenne :** $\langle s\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,\mathrm{d}t$ | **Valeur efficace :** $S_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\,\mathrm{d}t}$

- ➤ La valeur moyenne est calculée sur tout intervalle de largeur T, comme $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$.
- ➤ La valeur efficace est calculée de même.
  Les appareils affichant la valeur efficace d'un signal sont dits « RMS » : *Root Mean Square*.

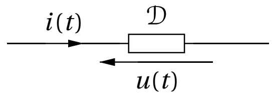
Cas du signal sinusoïdal

Dans le cas d'un signal sinusoïdal $s(t) = S_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, on a

$$\boxed{\langle s\rangle = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{S_{\text{eff}} = \frac{S_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}}.$$

1.2 Impédance et admittance complexes

On considère un dipôle linéaire $\mathcal{D}$, orienté en convention récepteur :



On se place en régime sinusoïdal : $i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ et $u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$, où φ est le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$.
Si le dipôle est linéaire, on peut utiliser la notation complexe, définissant la valeur complexe et l'amplitude complexe pour chaque grandeur sinusoïdale.

valeur instantanée	**signal complexe**	**amplitude complexe**
$x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$	$\underline{x}(t) = X_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$	$\underline{X} = X_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

- ➤ Le signal complexe dépend du temps; on a $x(t) = \mathrm{Re}\big(\underline{x}(t)\big)$.
- ➤ L'amplitude complexe ne dépend pas du temps.
  On en déduit l'amplitude et la phase du signal réel par $X_\mathrm{m} = \big|\underline{X}\big|$ et $\varphi = \arg\big(\underline{X}\big)$.

On définit l'**impédance complexe** $\underline{Z}$ du dipôle par $\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$.

On définit l'**admittance complexe** $\underline{Y}$ du dipôle par $\boxed{\underline{Y} = 1/\underline{Z}}$.

- ➤ L'impédance dépend *a priori* de la pulsation des signaux : $\underline{Z}(\mathrm{j}\omega)$.
- ➤ Le module de l'impédance s'exprime en ohm (Ω), celui de l'admittance en siemens (S).

On peut noter l'impédance d'un dipôle de deux façons : $\boxed{\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = R+\mathrm{j}X}$:

— la partie réelle R est la **résistance** du dipôle;

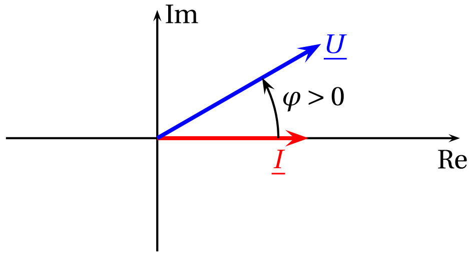
— la partie imaginaire X est la **réactance** du dipôle.

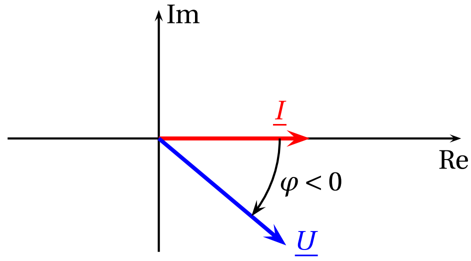
dipôle	impédance	admittance	commentaire
résistance	$\underline{Z} = R$	$\underline{Y} = 1/R$	$X = 0$: dipôle purement résistif
condensateur	$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$	$\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega$	$R = 0$: dipôle purement réactif
bobine idéale	$\underline{Z} = \mathrm{j}L\omega$	$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}$	$R = 0$: dipôle purement réactif

- ➤ Pour le condensateur, on a $X = -\frac{1}{C\omega} < 0$; un dipôle tel que $X < 0$ est dit capacitif.
- ➤ Pour la bobine, on a $X = L\omega > 0$; un dipôle tel que $X > 0$ est dit inductif.

Construction de Fresnel

On représente les amplitudes complexes dans le plan complexe à un instant donné. On se place en $t = 0$, et on prend l'intensité comme origine des phases.





1.3 Puissance instantanée — Puissance moyenne

La puissance instantanée reçue par un dipôle orienté en convention récepteur est donnée par $\boxed{p(t) = u(t)i(t)}$.

La puissance moyenne est donnée par $P = \langle p \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t$.

Cas de la résistance

La puissance instantanée reçue vaut $p(t) = Ri^2(t) = \dfrac{u^2(t)}{R}$.

La puissance moyenne vaut $P = R\langle i^2 \rangle$ soit $\boxed{P = RI_{\text{eff}}^2}$, ou $P = \dfrac{\langle u^2 \rangle}{R}$ soit $\boxed{P = \dfrac{U_{\text{eff}}^2}{R}}$.

➤ La valeur efficace du courant (resp. de la tension) correspond au courant (resp. à la tension) continu qui donnerait la même puissance moyenne absorbée.

Cas de la bobine idéale

Comme $u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, la puissance instantanée reçue vaut $p(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2(t)\right)$.

La puissance moyenne vaut donc $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\left[\dfrac{1}{2}Li^2(t)\right]_{t_0}^{t_0+T} = 0$ car $i(t_0+T) = i_0(t_0)$, le courant étant périodique de période T.

Cas du condensateur idéal

Comme $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, la puissance instantanée reçue vaut $p(t) = u(t)C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{Cu^2(t)}{2}\right)$.

La puissance moyenne vaut donc $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\left[\dfrac{Cu^2(t)}{2}\right]_{t_0}^{t_0+T} = 0$ car $u(t_0+T) = u_0(t_0)$, la tension étant périodique de période T.

Un résultat utile :

> Si f est une fonction périodique, alors $\langle \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \rangle = 0$.

➤ On a en effet $\langle \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\left[f(t)\right]_{t_0}^{t_0+T} = \dfrac{f(t_0+T) - f(t_0)}{T} = 0$ car $f(t_0+T) = t(t_0)$.

2 — Puissance en régime sinusoïdal

2.1 Puissance moyenne – Facteur de puissance

On considère un dipôle orienté en convention récepteur, avec

$$i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t)$$
$$u(t) = U_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

La puissance moyenne reçue par le dipôle est donnée par

$$\begin{aligned} P = \langle u(t)\,i(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\frac{\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi}{2}\right]\mathrm{d}t = \frac{U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos\varphi\,\mathrm{d}t = \frac{U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T}T\cos\varphi = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

> La **puissance moyenne**, appelée aussi **puissance active**, reçue par un dipôle en régime sinusoïdal est donnée par $P = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi$, où φ est le déphasage de la tension par rapport au courant.
> Le terme $\cos\varphi$ est appelé **facteur de puissance**.

2.2 Puissance moyenne absorbée par une impédance

On considère un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = Z(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = R + \mathrm{j}X$.
Les amplitudes complexes de la tension et de l'intensité sont données par $\underline{I} = I_{\text{eff}}\sqrt{2}$ et $\underline{U} = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.
De la relation $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$, on déduit en prenant le module la relation entre les valeurs efficaces : $U_{\text{eff}} = Z\,I_{\text{eff}}$.
La puissance moyenne s'écrit alors

$$P = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi = Z\,I_{\text{eff}}^2\cos\varphi = R\,I_{\text{eff}}^2$$

car $R = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) = Z\cos\varphi$.
L'admittance complexe du dipôle s'écrit $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{1}{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi}{Z}$.
La puissance moyenne peut alors s'écrire aussi

$$P = U_{\text{eff}}\frac{U_{\text{eff}}}{Z}\cos\varphi = U_{\text{eff}}^2\,\mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right)$$

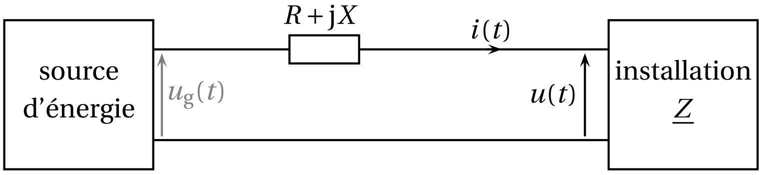
comme $\mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) = \dfrac{\cos\varphi}{Z}$.

> La puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal est donnée par
>
> $$P = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right)I_{\text{eff}}^2 = \mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right)U_{\text{eff}}^2\,.$$

➤ Dans le cas d'un dipôle purement réactif, donc l'impédance est de la forme $\underline{Z} = \mathrm{j}X$, on a $\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) = 0$ et $\mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) = 0$, d'où $P = 0$: **un dipôle purement réactif ne consomme pas de puissance en moyenne en régime sinusoïdal**.
On retrouve le résultat établi dans le cas du condensateur idéal et de la bobine idéale.

3 — Application : relèvement du facteur de puissance

On considère un transport de puissance électrique entre une source et une installation d'impédance $\underline{Z}$, par une ligne électrique d'impédance $R+\mathrm{j}X$. On est en régime sinusoïdal.



— La source fournit la puissance moyenne P_g.

— L'installation consomme la puissance moyenne $P_\mathrm{u} = U_\mathrm{eff} I_\mathrm{eff} \cos\varphi$ où $\underline{Z} = Z\cos\varphi$.

— La ligne consomme la puissance moyenne $P_\ell = RI_\mathrm{eff}^2$ (pertes en ligne).

Le rendement de cette configuration est donnée par le rapport de la puissance utile P_u (effectivement reçue par l'installation) sur la puissance P_g délivrée par le générateur, soit

$$\eta = \frac{P_\mathrm{u}}{P_\mathrm{g}}.$$

En moyenne, la puissance délivrée par la source est consommée par la ligne et l'installation, soit $P_\mathrm{g} = P_\ell + P_\mathrm{u}$.

La puissance instantanée délivrée par le générateur est $p_\mathrm{g}(t) = u_\mathrm{g}(t)i(t)$ *(il est orienté en convention générateur).*
La puissance instantanée reçue par l'installation est $p_\mathrm{u}(t) = u(t)i(t)$ *(orientation en convention récepteur).*
La tension aux bornes de la résistance de la ligne, en convention récepteur, est $u_\ell(t) = u_\mathrm{g}(t) - u(t)$. *La puissance reçue par la ligne est donc* $p_\ell(t) = u_\ell(t)(t) = u_\mathrm{g}(t)i(t) - u(t)i(t)$, *soit* $p_\ell(t) = p_\mathrm{g}(t) - p_\mathrm{u}(t)$. *On a donc* $p_\mathrm{g}(t) = p_\ell(t) + p_\mathrm{u}(t)$ *et, en prenant les valeurs moyennes,* $P_\mathrm{g} = P_\ell + P_\mathrm{u}$.

Le rendement peut alors s'écrire

$$\eta = \frac{P_\mathrm{u}}{P_\mathrm{u}+P_\ell} = \frac{1}{1+\frac{P_\ell}{P_\mathrm{u}}} = \frac{1}{1+\frac{RI_\mathrm{eff}^2}{P_\mathrm{u}}}.$$

Dans la pratique, c'est la tension efficace délivrée par la source qui est fixée (230 V en France en monophasé), l'intensité étant déterminée par l'impédance de l'installation. On va donc exprimer η en fonction de U_eff en éliminant I_eff à partir de $P_\mathrm{u} = U_\mathrm{eff} I_\mathrm{eff}\cos\varphi$, soit

$$\boxed{\eta = \frac{1}{1+\frac{RP_\mathrm{u}}{U_\mathrm{eff}^2\cos^2\varphi}}}.$$

Pour une puissance consommée par l'utilisateur P_u donnée, l'intensité efficace dans la ligne vaut $I_\mathrm{eff} = \dfrac{P_\mathrm{u}}{U_\mathrm{eff}\cos\varphi}$.
Si le facteur $\cos\varphi$ diminue, le rendement η diminue : l'intensité dans la ligne I_eff augmente, ce qui augmente les pertes en ligne par effet Joule[1].
Le distributeur impose une valeur minimale du facteur de puissance : $\cos\varphi \geqslant 0{,}93$. L'utilisateur doit donc **relever le facteur de puissance** de son installation s'il est trop faible.

➤ Dans la pratique, les installations industrielles ont une impédance inductive ($X > 0$) du fait de la présence de moteurs électriques. On relève le facteur de puissance en plaçant un condensateur en parallèle avec $\underline{Z}$ pour réduire le déphasage de la tension sur le courant (et ains augmenter $\cos\varphi$).

1. Et c'est le distributeur qui « paye la différence » entre la puissance fournie et la puissance consommée, les pertes en ligne étant à sa charge...