TD de conversion de puissance n° 1 — Puissance en régime sinusoïdal

1 — Valeurs efficaces

1. Un signal carré symétrique vaut alternativement $i(t) = \pm I_\mathrm{m}$. On a donc $i^2(t) = I_\mathrm{m}^2$ constante, égale à sa valeur moyenne.
On en déduit la racine de la moyenne de $i^2(t)$:

$$\boxed{I_\mathrm{eff} = I_\mathrm{m}}\,.$$

2. On a

$$i^2(t) = \begin{cases} I_\mathrm{m}^2 & \text{pour } 0 \leqslant t < \alpha T \\ 0 & \text{pour } \alpha T \leqslant t < T \end{cases}$$

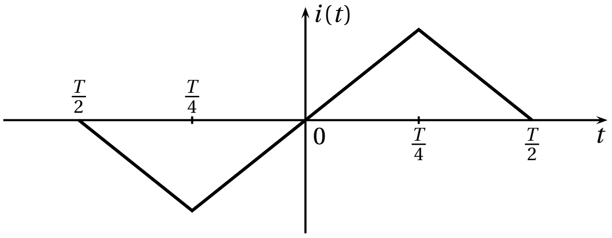
On a donc

$$I_\mathrm{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} I_\mathrm{m}^2\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha T}{T} I_\mathrm{m}^2\,,$$

d'où

$$\boxed{I_\mathrm{eff} = \sqrt{\alpha}\, I_\mathrm{m}}\,.$$

3. Signal triangulaire symétrique représenté sur une période :



Compte tenu de la parité, on peut écrire

$$I_\mathrm{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Compte tenu de la symétrie de $i^2(t)$, on peut écrire

$$I_\mathrm{eff}^2 = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} i^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Sur $[0, T/4]$, on a

$$i(t) = \frac{I_\mathrm{m}}{T/4}\,t = \frac{4 I_\mathrm{m}}{T}\,t\,,$$

d'où

$$I_\mathrm{eff}^2 = \frac{4}{T}\,\frac{4^2 I_\mathrm{m}^2}{T^2}\int_0^{T/4} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{4^3 I_\mathrm{m}^2}{T^3}\,\frac{1}{3}\left(\frac{T}{4}\right)^3 = \frac{I_\mathrm{m}^2}{3}\,.$$

On en déduit

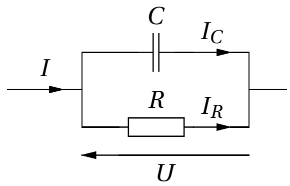
$$\boxed{I_\mathrm{eff} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{3}}}\,.$$

2 — Angle de pertes d'un condensateur

Pour construire le diagramme de Fresnel, il convient de mettre les signaux sous la même forme « cos » :

$$i(t) = -I_\mathrm{eff}\sqrt{2}\sin(2\pi f t - \delta) = I_\mathrm{eff}\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \pi/2 - \delta)\,.$$

Le schéma du modèle du condensateur est le suivant :



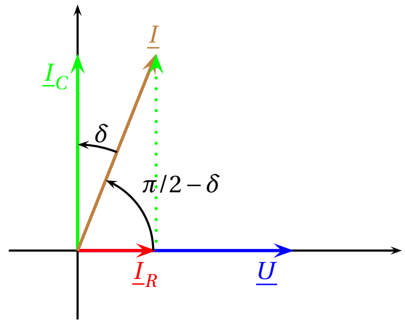
Entre les amplitudes complexes, on a

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_R$$

avec

$$\underline{I}_C = \mathrm{j}C\omega\underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}\,.$$

Construisons le diagramme de Fresnel, en plaçant la tension à l'origine des phases. L'intensité $\underline{I}_C$ présente un déphasage de $+\pi/2$ avec $\underline{U}$.



On en déduit $\tan\delta = \dfrac{I_R}{I_C} = \dfrac{1/R}{C\omega}$ soit

$$\boxed{\tan\delta = \frac{1}{2\pi f R C}}\,.$$

On calcule $\boxed{\delta = 1{,}8\times10^{-3}}$.
Avec la notation

$$i(t) = I_\mathrm{eff}\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \pi/2 - \delta)\,,$$

on remarque que le déphasage du courant par rapport à la tension est $\varphi_{I/U} = \pi/2 - \delta$. On a donc

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \sin\delta\,,$$

et la puissance moyenne $P = U_\mathrm{eff} I_\mathrm{eff}\cos\varphi$ s'écrit alors

$$\boxed{P = U_\mathrm{eff} I_\mathrm{eff}\sin\delta}\,.$$

La puissance moyenne consommée est donnée par

$$P = \mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) U_\mathrm{eff}^2\,.$$

Avec $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega$, on a donc

$$\boxed{P = \frac{U_\mathrm{eff}^2}{R}}\,.$$

On calcule $\boxed{P = 2{,}5\times10^{-5}\ \mathrm{W}}$.

3 — Relèvement du facteur de puissance d'un moteur électrique

Un moteur électrique est alimenté par un courant alternatif de fréquence $f = 50$ Hz sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220$ V. Sa puissance est $P = 10$ kW et son facteur de puissance est $\cos\varphi = 0{,}7$.
Le moteur est modélisé par l'association en série d'une bobine d'inductance L et d'un résistor de résistance R.

1. La puissance consommée par le moteur est donnée par

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi,$$

d'où

$$\boxed{I_{\text{eff}} = \frac{P}{U_{\text{eff}}\cos\varphi}}.$$

On calcule $\boxed{I_{\text{eff}} = 65\text{ A}}$.

De $P = RI_{\text{eff}}^2$ on déduit $\boxed{R = 2{,}4\ \Omega}$.

2. L'impédance du moteur modélisé par R en série avec L est

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega = R + \mathrm{j}2\pi f L.$$

On en déduit [1]

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{2\pi f L}{R}}.$$

On en déduit $\boxed{L = 7{,}7\text{ mH}}$.

3. L'admittance de C en parallèle avec l'association série de R et L est

$$\boxed{\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R+\mathrm{j}L\omega}}.$$

Pour exprimer $\tan\varphi'$, il faut expliciter les parties réelle et imaginaire :

$$\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega + \frac{R - \mathrm{j}L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R}{R^2+L^2\omega^2} + \mathrm{j}\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right).$$

Comme $\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, on a $\underline{Y} = \frac{1}{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$. On en déduit

$$\tan\varphi' = -\frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}}{\frac{R}{R^2+L^2\omega^2}}$$

soit

$$\boxed{\tan\varphi' = \frac{L\omega - C\omega(R^2+L^2\omega^2)}{R}}.$$

4. On déduit de l'expression précédente

$$C = \frac{2\pi f L - R\tan\varphi'}{2\pi f (R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2)}.$$

Avec $\cos\varphi' = 0{,}9$, on calcule $\boxed{C = 350\ \mu\text{F}}$.

Cette valeur est tout à fait accessible.

1. Comme $\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, on a $R = Z\cos\varphi$ et $L\omega = Z\sin\varphi$.ø

4 — Facteur de puissance

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 200$ V.
Elle consomme une puissance $P = 12$ kW.
La fréquence est $f = 50$ Hz et l'intensité efficace $I_{\text{eff}} = 80$ A.

1. La puissance consommée par l'installation est donnée par

$$P = RI_{\text{eff}}^2.$$

On en déduit $\boxed{R = 1{,}88\ \Omega}$.
Pour peut déterminer L à partir de l'impédance de l'installation :

$$U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} \quad \text{avec} \quad Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

On en déduit

$$L = \frac{\sqrt{U_{\text{eff}}^2/I_{\text{eff}}^2 - R^2}}{\omega},$$

d'où $\boxed{L = 5{,}26\text{ mH}}$.
On peut aussi déterminer le $\cos\varphi$ à partit de

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$$

soit $\cos\varphi = 0{,}75$.
De $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ on déduit

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

En en déduit la même valeur de L.

2. On calcule l'admittance de C en parallèle avec l'installation :

$$\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R+\mathrm{j}L\omega} = \frac{R}{R^2+L^2\omega^2} + \mathrm{j}\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right)$$

On en déduit comme $\arg\underline{Y} = -\varphi$

$$-\tan\varphi = \frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}}{\frac{R}{R^2+L^2\omega^2}} = \frac{R^2+L^2\omega^2}{R}C\omega - \frac{L\omega}{R}.$$

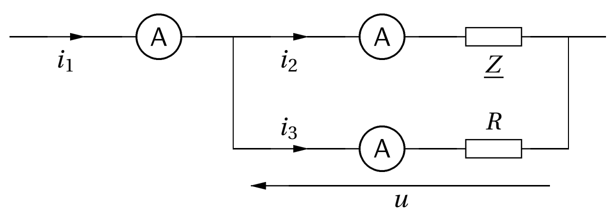
Avec $\cos\varphi = 0{,}9$, on calcule $\tan\varphi = 0{,}48$, et on en déduit

$$C = \frac{-R\tan\varphi + L\omega}{(R^2+L^2\omega^2)\omega}$$

On calcule $\boxed{C = 0{,}39\text{ mF}}$.

5 — Mesure d'un facteur de puissance par la méthode des 3 ampèremètres

On considère les ampèremètres d'impédance nulle : il n'y a pas de tension à leurs bornes.



1. Prenons l'intensité i_2 pour l'origine des phases. On a donc en amplitudes complexes

$$\underline{I}_2 = I_{2e}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{U} = U_e\sqrt{2}\,e^{j\varphi},$$

le facteur de puissance cherché étant $\cos\varphi$.
La loi des nœuds s'écrit

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 .$$

Comme $\underline{U} = R\underline{I}_3$, l'intensité i_3 présente le même déphasage que la tension avec i_2.
En notant φ' le déphasage de i_1 avec i_2, on peur donc écrire

$$I_{1e}\,e^{j\varphi'} = I_{2e} + I_{3e}\,e^{j\varphi} .$$

Multiplions par l'expression conjuguée pour en déduire le module :

$$I_{1e}^2 = \left(I_{2e} + I_{3e}\,e^{j\varphi}\right)\left(I_{2e} + I_{3e}\,e^{-j\varphi}\right) = I_{2e}^2 + I_{3e}^2 + 2I_{2e}I_{3e}\cos\varphi .$$

On en déduit le facteur de puissance

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2}{2I_{2e}I_{3e}}} .$$

2. La puissance moyenne consommée par le dipôle est donnée par

$$P = U_e I_{2e}\cos\varphi \quad \text{avec} \quad U_e = RI_{3e} .$$

On a donc

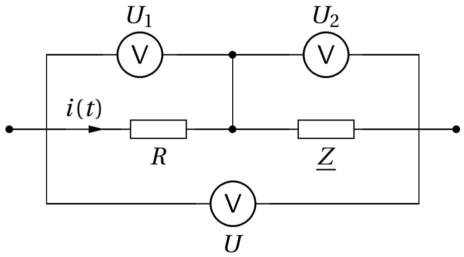
$$P = RI_{2e}I_{3e}\cos\varphi .$$

Avec l'expression précédente, on déduit

$$\boxed{P = \frac{R}{2}\left(I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2\right)} .$$

6 — Mesure d'un facteur de puissance par la méthode des 3 voltmètres

On considère les voltmètres d'impédance infinie : la même intensité circule dans R et $\underline{Z}$.



Prenons l'intensité i pour origine des phases.
On a donc

$$\underline{I} = I_e\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = U_{2e}\sqrt{2}\,e^{j\varphi} .$$

La tension $u_1 = r\,i$ est en phase avec l'intensité :

$$\underline{U}_2 = U_{2e}\sqrt{2} .$$

La loi d'additivité des tensions s'écrit

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

soit en notant φ' le déphasage de u avec i

$$U_e\,e^{j\varphi'} = U_{1e} + U_{2e}\,e^{j\varphi} .$$

En multipliant par l'expression conjuguée

$$U_e\,e^{-j\varphi'} = U_{1e} + U_{2e}\,e^{-j\varphi}$$

on obtient

$$U_e^2 = U_{1e}^2 + U_{2e}^2 + 2U_{1e}U_{2e}\cos\varphi\,,,$$

d'où le facteur de qualité

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{U_e^2 - U_{1e}^2 - U_{2e}^2}{2U_{1e}U_{2e}}} .$$

Le dipôle consomme la puissance moyenne

$$P = U_{2e}I_e\cos\varphi$$

soit comme $U_{1e} = RI_e$,

$$P = \frac{U_{1e}U_{2e}}{R}\cos\varphi .$$

Avec l'expression précédente, on obtient

$$\boxed{P = \frac{U_e^2 - U_{1e}^2 - U_{2e}^2}{2R}} .$$