Grandeurs électriques en régime sinusoïdal

Valeurs instantanée, moyenne efficace

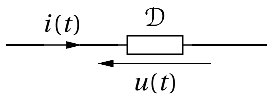
Soit $s(t)$ un signal de période T, et t_0 un instant quelconque.

Valeur instantanée : $s(t)$	**Valeur moyenne :** $\langle s\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,\mathrm{d}t$	**Valeur efficace :** $S_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\,\mathrm{d}t}$

- $\langle s\rangle$ et S_{eff} sont calculées sur tout intervalle de largeur T ; en général on prend $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$.
- Dans le cas d'un signal sinusoïdal $s(t) = S_{\text{m}}\cos(\omega t+\varphi)$, on a $\langle s\rangle = 0$ et $S_{\text{eff}} = \dfrac{S_{\text{m}}}{\sqrt{2}}$.

Impédance et admittance complexes

On considère un dipôle linéaire $\mathcal{D}$, orienté en convention récepteur :



Notation complexe en régime sinusoïdal (ou harmonique) :

valeur instantanée	signal complexe	amplitude complexe
$x(t) = X_{\text{m}}\cos(\omega t+\varphi)$	$\underline{x}(t) = X_{\text{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$	$\underline{X} = X_{\text{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

- Le signal complexe dépend du temps ; on a $x(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{x}(t)\right)$.
- L'amplitude complexe ne dépend pas du temps.
- L'amplitude et la phase du signal réel sont données par $X_{\text{m}} = \left|\underline{X}\right|$ et $\varphi = \arg\left(\underline{X}\right)$.

L'**impédance complexe** $\underline{Z}$ et l'**admittance complexe** $\underline{Y}$ du dipôle sont définies par $\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$ et $\boxed{\underline{Y} = 1/\underline{Z}}$.

- L'impédance dépend *a priori* de la pulsation des signaux : $\underline{Z}(\mathrm{j}\omega)$.
- Le module de l'impédance s'exprime en ohm (Ω), celui de l'admittance en siemens (S).

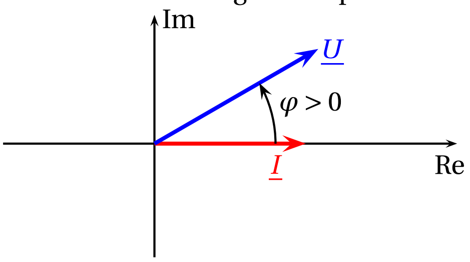
On peut noter l'impédance d'un dipôle de deux façons : $\boxed{\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = R + \mathrm{j}X}$, où la partie réelle R est la **résistance** du dipôle et la partie imaginaire X est sa **réactance**.

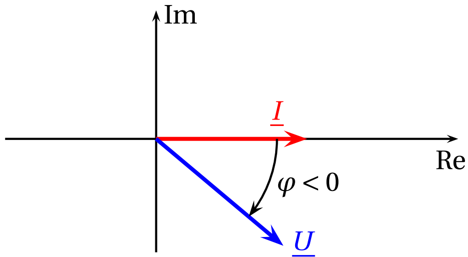
dipôle	impédance	admittance	commentaire
résistance	$\underline{Z} = R$	$\underline{Y} = 1/R$	$X = 0$: dipôle purement résistif
condensateur	$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$	$\underline{Y} = \mathrm{j}C\omega$	$R = 0$: dipôle purement réactif
bobine idéale	$\underline{Z} = \mathrm{j}L\omega$	$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}$	$R = 0$: dipôle purement réactif

- Pour le condensateur, on a $X = -\dfrac{1}{C\omega} < 0$; un dipôle tel que $X < 0$ est dit capacitif.
- Pour la bobine, on a $X = L\omega > 0$; un dipôle tel que $X > 0$ est dit inductif.
- Attention : $\underline{Y} = \dfrac{1}{R+\mathrm{j}X} = \dfrac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2}$. Dans le cas général, $\mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) \neq \dfrac{1}{\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right)}$.

Construction de Fresnel

On représente les amplitudes complexes dans le plan complexe à un instant donné. On se place en $t = 0$, et on prend l'intensité comme origine des phases.





Puissance électrique en régime sinusoïdal

Puissance instantanée — Puissance moyenne

On considère un dipôle orienté en convention récepteur.

Il reçoit la **puissance instantanée** $\boxed{p(t) = u(t)i(t)}$ et la **puissance moyenne** $\boxed{P = \langle p \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t}$.

dipôle	résistance	bobine idéale	condensateur idéal
puissance moyenne	$RI_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}}^2/R$	0	0

➤ La puissance instantanée reçue par une bobine est $p(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2(t)\right)$, celle reçue par un condensateur $p(t) = u(t)C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{Cu^2(t)}{2}\right)$.

➤ Si $f(t)$ est périodique, alors $\langle \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \rangle = 0$.

Régime sinusoïdal : puissance moyenne – facteur de puissance

On considère un dipôle orienté en convention récepteur, avec $i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et $u(t) = U_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.

La **puissance moyenne**, appelée aussi **puissance active**, reçue par un dipôle en régime sinusoïdal est donnée par $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$, où φ est le déphasage de la tension par rapport au courant.
Le terme $\cos\varphi$ est appelé **facteur de puissance**.

Puissance moyenne absorbée par une impédance

En régime sinusoïdal, la puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire d'impédance est donnée par

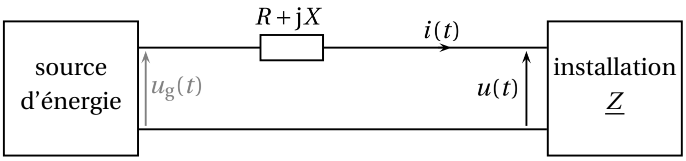
$$P = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) I_{\text{eff}}^2 = \mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) U_{\text{eff}}^2,$$

où $\underline{Z}$ est l'impédance du dipôle et $\underline{Y}$ son admittance.

➤ Dans le cas d'un dipôle purement réactif, donc l'impédance est de la forme $\underline{Z} = \mathrm{j}X$, on a $\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right) = 0$ et $\mathrm{Re}\left(\underline{Y}\right) = 0$, d'où $P = 0$: **un dipôle purement réactif ne consomme pas de puissance en moyenne en régime sinusoïdal**.

Application : relèvement du facteur de puissance

On considère un transport de puissance électrique en régime sinusoïdal entre une source et une installation d'impédance $\underline{Z}$, par une ligne électrique d'impédance $R + \mathrm{j}X$.



La source fournit la puissance moyenne P_{g} ; l'installation consomme la puissance moyenne $P_{\mathrm{u}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$ où $\underline{Z} = Z\cos\varphi$ et la ligne consomme la puissance moyenne $P_\ell = RI_{\text{eff}}^2$ (pertes en ligne).
Le rendement, défini par $\eta = P_{\mathrm{u}}/P_{\mathrm{g}}$, s'écrit $\eta = \dfrac{P_{\mathrm{u}}}{P_{\mathrm{u}} + P_\ell} = \dfrac{1}{1 + \frac{P_\ell}{P_{\mathrm{u}}}} = \dfrac{1}{1 + \frac{RI_{\text{eff}}^2}{P_{\mathrm{u}}}} = \dfrac{1}{1 + \frac{RP_{\mathrm{u}}}{U_{\text{eff}}^2\cos^2\varphi}}$.

Pour P_{u} donnée, le rendement diminue si $\cos\varphi$ diminue : l'intensité efficace $I_{\text{eff}} = \dfrac{P_{\mathrm{u}}}{U_{\text{eff}}\cos\varphi}$ augmente, ce qui augmente les pertes en ligne par effet Joule.
Le distributeur impose une valeur minimale du facteur de puissance : $\cos\varphi \geqslant 0{,}93$. L'utilisateur doit donc **relever le facteur de puissance** de son installation s'il est trop faible.

➤ Dans la pratique, les installations industrielles ont une impédance inductive ($X > 0$) du fait de la présence de moteurs électriques. On relève le facteur de puissance en plaçant un condensateur en parallèle avec $\underline{Z}$ pour réduire le déphasage de la tension sur le courant (et ains augmenter $\cos\varphi$).