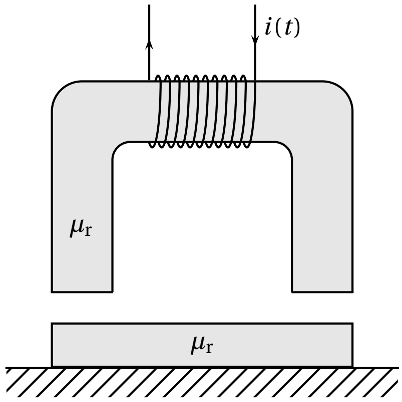
1 — Contacteur électromagnétique en translation

1.1 Le dispositif



Un milieu ferromagnétique en U est entouré d'un bobinage parcouru par un courant $i(t)$ sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz.
Un barreau du même milieu ferromagnétique est posé sur un support.
Lorsque l'on approche le circuit magnétique en U :

— le barreau est attiré ;

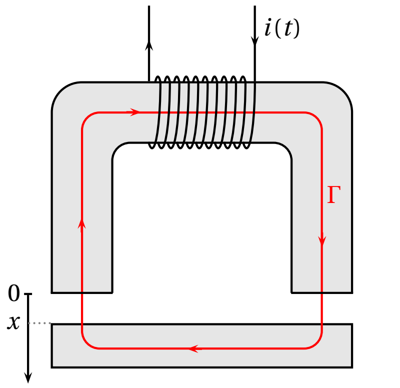
— il reste collé si I_{eff} est suffisamment élevée ;

— l'ensemble vibre à une fréquence de 100 Hz ;

— lorsque l'on coupe le courant dans le bobinage, le barreau retombe.

Le circuit magnétique n'étant parcouru par aucun courant, on ne peut expliquer la force s'exerçant sur le barreau par la force de Laplace. Nous allons mener une étude basée sur l'énergie magnétique.

1.2 Énergie magnétique



La milieu ferromagnétique est supposé linéaire, non saturé, de perméabilité magnétique relative μ_r.
On note S sa section moyenne et ℓ sa longueur totale (incluant la partie mobile).
On note x l'entrefer.
On néglige toute fuite magnétique : les lignes de champ sont parfaitement canalisée dans le milieu magnétique. On note H_{fer} et B_{fer} les champs dans le milieu magnétique, H_{air} et B_{air} les champs dans l'entrefer.
L'enroulement comporte N spires et est parcouru par une intensité $i(t)$.

Excitation magnétique

Le théorème d'Ampère appliqué sur le contour Γ de longueur[1] $\ell + 2x$ s'écrit

$$\ell H_{\text{fer}} + 2x H_{\text{air}} = Ni\,. \tag{1}$$

Champ magnétique

Le champ magnétique est à flux conservatif. Comme on le suppose parfaitement canalisé sur une section S constante, on a $SB_{\text{fer}} = SB_{\text{air}}$, ce qui permet de noter

$$B_{\text{fer}} = B_{\text{air}} = B\,.$$

Dans le ferromagnétique, on a $B_{\text{fer}} = \mu_0\mu_r H_{\text{fer}}$; dans l'entrefer, on a $B_{\text{air}} = \mu_0 H_{\text{air}}$.
L'équation (1) s'écrit alors

$$\ell\frac{B}{\mu_0\mu_r} + 2x\frac{B}{\mu_0} = NI$$

d'où

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}}\,. \tag{2}$$

1. La longueur totale dans le milieu magnétique est ℓ, à laquelle il faut ajouter deux fois l'entrefer x.

Inductance propre et énergie magnétique

Le flux magnétique total à travers les N spires de l'enroulement est donné par

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}} i\,.$$

On en déduit l'inductance propre du système définie par $\Phi = Li$, soit

$$\boxed{L(x) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}}}\,.$$

➤ L'inductance propre est fonction (décroissante) de x.

L'énergie magnétique du système s'obtient à partir de la relation $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$, soit

$$\boxed{\mathcal{E}_m(x,i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}}\right) i^2}\,.$$

➤ L'énergie magnétique est fonction de la largeur x de l'entrefer et de l'intensité i parcourant le bobinage.

➤ Il est plus facile d'obtenir l'énergie magnétique à partir de l'inductance propre, mais on aurait pu aussi la calculer à partir de l'expression de la densité volumique w_m d'énergie magnétique portée par le champ [2] :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{espace}} w_m \,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\text{fer}} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_{\text{air}} \frac{B^2}{2\mu_0}\,\mathrm{d}\tau = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\iiint_{\text{fer}} \mathrm{d}\tau + \frac{B^2}{2\mu_0}\iiint_{\text{air}} \mathrm{d}\tau = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} S\ell + \frac{B^2}{2\mu_0} 2Sx$$

$$= S\left(\frac{\ell}{2\mu_0\mu_r} + \frac{2x}{2\mu_0}\right)\left(\frac{\mu_0 N i}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}}\right)^2 = \frac{S}{2\mu_0}\left(2x + \frac{\ell}{\mu_r}\right)\frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{\left(2x + \frac{\ell}{\mu_r}\right)^2} = \frac{\mu_0 S N^2 i^2}{2\left(2x + \frac{\ell}{\mu_r}\right)}\,.$$

1.3 Force électromagnétique

On admet l'expression de la force électromagnétique s'exerçant sur la partie mobile.

Étant donné un système électromécanique possédant une partie mobile en translation repérée par sa position x ; la force électromagnétique $\vec{F} = F\vec{e}_x$ exercée sur la partie mobile est donnée par

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m(x,i)}{\partial x}\right)_i$$

où $\mathcal{E}_m(x,i)$ est l'énergie magnétique du système.

➤ Cette relation est « fournie ». La démonstration, facultative, est donnée en annexe.

➤ Dans le cas d'un système électromécanique possédant une partie mobile en rotation repérée par sa position angulaire θ, on généralise le résultat précédent en donnant le couple électromagnétique s'exerçant sur la partie mobile :

$$\boxed{\Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m(\theta,i)}{\partial \theta}\right)_i}\,.$$

1.4 Applications

En dérivant l'expression $\mathcal{E}_m(x,i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}}\right) i^2$ par rapport à x, on obtient la composante de la force magnétique selon $\vec{e}_x$:

$$\boxed{F = -\frac{\mu_0 N^2 S}{\left(2x + \frac{\ell}{\mu_r}\right)^2} i^2(t)}\,.$$

2. Le champ magnétique est uniforme dans le milieu magnétique et dans l'entrefer, et le volume de l'entrefer est $2Sx$.

On peut en faire plusieurs commentaires :

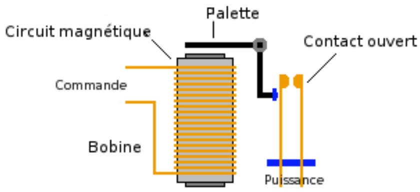
— la force est attractive (c'est-à-dire selon $-\vec{e}_x$) quel que soit le signe de $i(t)$ (c'est son carré qui apparaît dans l'expression) ;

— la force est maximale quand $x = 0$, c'est-à-dire quand le barreau est en contact avec le circuit magnétique, et vaut $F_{\max} = -\dfrac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 S}{\ell} i^2(t)$;

— dans le cas d'un courant sinusoïdal $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, la force varie comme $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1+\cos(2\omega t)}{2}$, faisant apparaître une fréquence deux fois plus élevée que celle du courant. Cela explique les vibrations à la fréquence de 100 Hz quand le signal est issu du secteur à 50 Hz.

Ce principe permet plusieurs applications :

Relais. Un relais, ou contacteur, est un dispositif qui permet d'ouvrir ou de fermer un circuit électrique permettant de faire passer une intensité élevée (circuit de puissance), à l'aide d'un signal de commande de faible intensité (courant $i(t)$ dans la bobine).

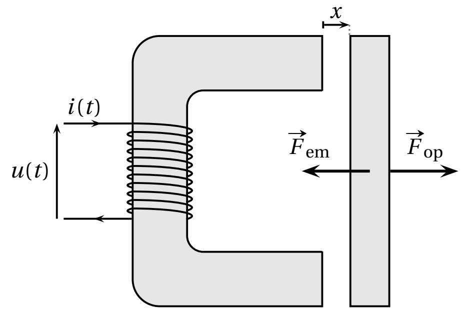


Électroaimant de levage. Le milieu ferromagnétique se comporte comme un aimant lorsque la bobine est parcourue par un courant, ce qui permet de soulever des matériaux ferreux.

Électrovanne. La partie mobile du circuit magnétique est reliée à une vanne permet de commander l'écoulement d'un fluide dans une canalisation. On en trouve dans les lave-linge.

Annexe : démonstration de l'expression de la force électromagnétique

Extrait du programme : *À l'aide d'un bilan énergétique, le professeur pourra justifier la relation* $F = \dfrac{\partial E}{\partial x}$, *mais cette démonstration ne doit pas être considérée comme exigible.*



Nous allons faire une étude énergétique sur le système complet {circuit magnétique + entrefer + bobine}.
Un opérateur déplace le barreau mobile en exerçant une force $\vec{F}_{\text{op}}$. Le barreau est de plus soumis à la force magnétique $\vec{F}_{\text{em}}$.
La bobine est traversée par un courant d'intensité $i(t)$ et a une tension $u(t)$ à ses bornes.
On néglige la pesanteur.

Le premier principe appliqué au système complet sous la forme différentielle, s'écrit [3]

$$\mathrm{d}(\mathcal{E}_{\text{mag}} + \mathcal{E}_{\text{c}}) = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q = \delta W_{\text{élec}} + \delta W_{\text{méca}} + \delta Q$$

où $\mathcal{E}_{\text{m}}$ est l'énergie magnétique du système et $\mathcal{E}_{\text{c}}$ son énergie cinétique.
La fém induite aux bornes de la bobine étant donnée par $e(t) = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$, d'où

$$u(t) = r\,i(t) - e(t) = r\,i(t) + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t},$$

où r est la résistance du bobinage.
Le travail élémentaire reçu pendant $\mathrm{d}t$ par le système sous forme électrique s'écrit alors

$$\delta W_{\text{élec}} = u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = r\,i^2(t) + i(t)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = r\,i^2(t) + i(t)\,\mathrm{d}\phi.$$

Le travail mécanique reçu *de la part de l'extérieur* [4] est $\delta W_{\text{méca}} = F_{\text{op}}\,\mathrm{d}x$.
Le transfert thermique *reçu* par le système correspond à l'énergie effectivement perdue par effet Joule (donc cédée à l'extérieur), soit

$$\delta Q = -r\,i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, le premier principe s'écrit après simplification.

$$\mathrm{d}(\mathcal{E}_{\text{mag}} + \mathcal{E}_{\text{c}}) = i(t)\,\mathrm{d}\phi + F_{\text{op}}\,\mathrm{d}x$$

avec $\mathcal{E}_{\text{mag}}(x,i) = \dfrac{1}{2}L(x)i^2(t)$, soit $\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{mag}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(Li^2\right) = \dfrac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L + Li\,\mathrm{d}i$. On a finalement

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{c}} + \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L + Li\,\mathrm{d}i = i\,\mathrm{d}\phi + F_{\text{op}}\,\mathrm{d}x.$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la partie mobile seule, soumise à la force de l'opérateur et à la force électromagnétique :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{c}} = F_{\text{op}}\,\mathrm{d}x + F_{\text{em}}\,\mathrm{d}x.$$

En remplaçant $\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{c}}$ dans le premier principe, on obtient

$$F_{\text{op}}\,\mathrm{d}x + F_{\text{em}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L + Li\,\mathrm{d}i = i\,\mathrm{d}\phi + F_{\text{op}}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$F_{\text{em}}\,\mathrm{d}x = i\,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L - Li\,\mathrm{d}i.$$

Le flux magnétique étant donné par $\phi = Li$, on a $\mathrm{d}\phi = L\,\mathrm{d}i + i\,\mathrm{d}L$, d'où

$$F_{\text{em}}\,\mathrm{d}x = Li\,\mathrm{d}i + i^2\,\mathrm{d}L - \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L - Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L.$$

On en déduit

$$F_{\text{em}} = \frac{i^2}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x}\right)_i.$$

3. On suppose la température constante, soit $\mathrm{d}U = 0$: l'énergie interne n'apparaît pas dans le bilan.
4. La force magnétique est une force intérieure au système ; elle n'apparaît donc pas dans les échanges énergétiques du premier principe.