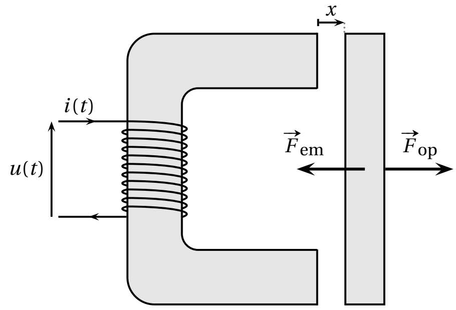
Annexe : démonstration de l'expression de la force électromagnétique

Extrait du programme : *À l'aide d'un bilan énergétique, le professeur pourra justifier la relation* $F = \dfrac{\partial E}{\partial x}$*, mais cette démonstration ne doit pas être considérée comme exigible.*



Nous allons faire une étude énergétique sur le système complet {circuit magnétique + entrefer + bobine}.
Un opérateur déplace le barreau mobile en exerçant une force $\vec{F}_{op}$. Le barreau est de plus soumis à la force magnétique $\vec{F}_{em}$.
La bobine est traversée par un courant d'intensité $i(t)$ et a une tension $u(t)$ à ses bornes.
On néglige la pesanteur.

Le premier principe appliqué au système complet sous la forme différentielle, s'écrit [1]

$$\mathrm{d}(\mathcal{E}_{mag} + \mathcal{E}_c) = \delta W_{ext} + \delta Q = \delta W_{élec} + \delta W_{méca} + \delta Q$$

où $\mathcal{E}_m$ est l'énergie magnétique du système et $\mathcal{E}_c$ son énergie cinétique.
La fém induite aux bornes de la bobine étant donnée par $e(t) = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$, d'où

$$u(t) = r\,i(t) - e(t) = r\,i(t) + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t},$$

où r est la résistance du bobinage.
Le travail élémentaire reçu pendant $\mathrm{d}t$ par le système sous forme électrique s'écrit alors

$$\delta W_{élec} = u(t)\,i(t)\,\mathrm{d}t = r\,i^2(t) + i(t)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = r\,i^2(t) + i(t)\,\mathrm{d}\phi.$$

Le travail mécanique reçu *de la part de l'extérieur*[2] est $\delta W_{méca} = F_{op}\,\mathrm{d}x$.
Le transfert thermique *reçu* par le système correspond à l'énergie effectivement perdue par effet Joule (donc cédée à l'extérieur), soit

$$\delta Q = -r\,i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, le premier principe s'écrit après simplification.

$$\mathrm{d}(\mathcal{E}_{mag} + \mathcal{E}_c) = i(t)\,\mathrm{d}\phi + F_{op}\,\mathrm{d}x$$

avec $\mathcal{E}_{mag}(x,i) = \dfrac{1}{2}L(x)\,i^2(t)$, soit $\mathrm{d}\mathcal{E}_{mag} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(Li^2\right) = \dfrac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L + Li\,\mathrm{d}i$. On a finalement

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_c + \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L + Li\,\mathrm{d}i = i\,\mathrm{d}\phi + F_{op}\,\mathrm{d}x.$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la partie mobile seule, soumise à la force de l'opérateur et à la force électromagnétique :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_c = F_{op}\,\mathrm{d}x + F_{em}\,\mathrm{d}x.$$

En remplaçant $\mathrm{d}\mathcal{E}_c$ dans le premier principe, on obtient

$$F_{op}\,\mathrm{d}x + F_{em}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L + Li\,\mathrm{d}i = i\,\mathrm{d}\phi + F_{op}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$F_{em}\,\mathrm{d}x = i\,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L - Li\,\mathrm{d}i.$$

Le flux magnétique étant donné par $\phi = Li$, on a $\mathrm{d}\phi = L\mathrm{d}i + i\,\mathrm{d}L$, d'où

$$F_{em}\,\mathrm{d}x = Li\,\mathrm{d}i + i^2\,\mathrm{d}L - \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L - Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{d}L.$$

On en déduit

$$F_{em} = \frac{i^2}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial\mathcal{E}_{mag}}{\partial x}\right)_i.$$

1. On suppose la température constante, soit $\mathrm{d}U = 0$: l'énergie interne n'apparaît pas dans le bilan.
2. La force magnétique est une force intérieure au système ; elle n'apparaît donc pas dans les échanges énergétiques du premier principe.