1 — Propagation du champ électromagnétique dans le vide

1.1 Équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide, on a $\rho = 0$ et $\vec{\jmath} = \vec{0}$.
Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

1.2 Équations de propagation

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday pour éliminer le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

On a de plus $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$. Comme $\varepsilon_0 \mu_0 \mathrm{c}^2 = 1$, on en déduit $\Delta \vec{E} = \dfrac{1}{\mathrm{c}^2} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.
De même on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère pour éliminer le champ électrique :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

On a de plus $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$, d'où $\Delta \vec{B} = \dfrac{1}{\mathrm{c}^2} \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$.

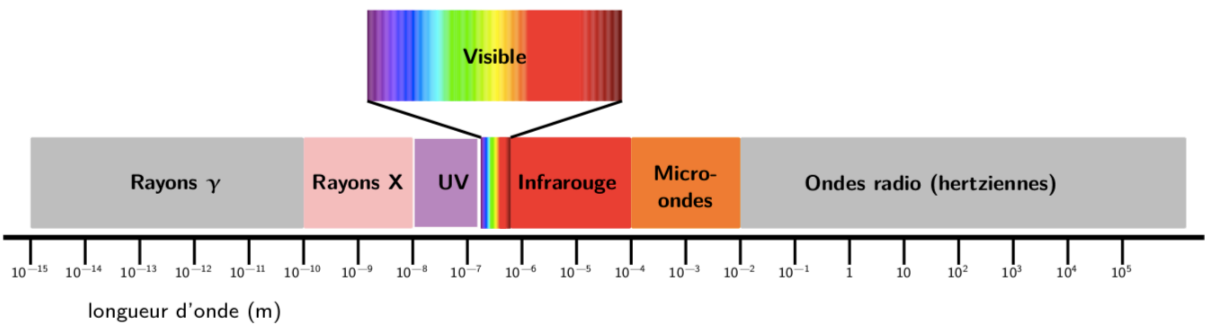
Dans une région sans charges ni courants, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent à la même équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E}(M,t) - \frac{1}{\mathrm{c}^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B}(M,t) - \frac{1}{\mathrm{c}^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

la célérité étant donnée par $\mathrm{c} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

- Les champs électrique et magnétique obéissent à deux équations de propagation découplées ; ils restent cependant couplés *via* les équations de Maxwell, et ne peuvent ainsi pas être indépendants dans une onde électromagnétique progressive.
- On a exactement $\mathrm{c} = 299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ par définition du mètre.
- La perméabilité magnétique du vide vaut exactement $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$. La permittivité diélectrique du vide vaut $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

1.3 Domaines de fréquence des ondes électromagnétiques



On peut donner quelques applications des ondes électromagnétiques selon leur domaine de fréquence (et de longueur d'onde).

type d'onde	**production**	**exemples d'utilisation**
Électrocinétique	alternateurs oscillateurs électroniques	réseau $f = 50$ Hz ($\lambda = 6000$ km) électronique BF $f < 100$ kHz ($\lambda < 3$ km)
Ondes hertziennes	antennes	radio AM $f = 1$ MHz ($\lambda \approx 300$ m) radio FM $f = 100$ MHz ($\lambda \approx 3$ m)
micro-ondes	antennes	téléphonie mobile $f \approx 1$ GHz ($\lambda \approx 30$ cm) four micro-ondes $f = 2{,}45$ GHz ($\lambda = 12{,}2$ cm) satellites $f \approx 10$ GHz ($\lambda \approx 3$ cm)
infrarouge	vibrations de la matière	$0{,}8\ \mu\text{m} < \lambda < 1$ mm caméra thermique, chauffage, vision nocturne
visible	transitions électroniques atomiques	$0{,}4\ \mu\text{m} < \lambda < 0{,}8$ mm vision humaine
ultraviolet	transitions électroniques atomiques	$0{,}28\ \mu\text{m} < \lambda < 0{,}4$ mm réactions chimiques, désinfection, détecteurs optiques
rayons X	transitions électroniques (couches profondes)	10 pm $< \lambda <$ 10 nm radiographie, diffraction par les cristaux
rayons γ	réactions nucléaires	1 pm $< \lambda <$ 10 pm dangereux

2 — Structure des ondes planes progressives harmoniques

2.1 Onde plane progressive harmonique

Une onde électromagnétique est dite **plane**, **progressive** et **harmonique** (OPPH) si chaque composante des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est de la forme

$$\boxed{a_i(M,T) = a_{i0}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_i)}$$

Le vecteur d'onde est donné par $\vec{k} = k\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde. La linéarité des équations en jeu permet d'utiliser la notation complexe

$$\boxed{\underline{a}_i(M,t) = \underline{a}_{i0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}}\,.$$

On retrouve $a_i(M,t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{a}_i(M,t)\right\}$.

2.2 Équations de Maxwell complexes pour une OPPH

La dépendance avec le temps et la position des composantes du champ se fait selon

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\,.$$

On a les équivalences $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \times\mathrm{i}\omega}$ et $\boxed{\vec{\nabla} \longleftrightarrow \times(-\mathrm{i}\vec{k})}$.
En effet :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \times(-\mathrm{i}k_x) \\ \times(-\mathrm{i}k_y) \\ \times(-\mathrm{i}k_z) \end{pmatrix} = \times(-i\,\vec{k})\,.$$

On peut donc écrire, pour une OPPH complexe de la forme $\vec{\underline{a}}(M,t) = \vec{\underline{a}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{\underline{a}} = -\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\underline{a}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\underline{a}} = -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\vec{\underline{a}}}\,.$$

On a donc div $\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\,\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$; div $\underline{\vec{B}} = -\mathrm{i}\,\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$;
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ s'écrit $-\mathrm{i}\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}}$; $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ s'écrit $-\mathrm{i}\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}}$.

Les équations de Maxwell en notation complexe s'écrivent

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}}(M,t) = 0 \qquad \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}(M,t) = 0$$

$$\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}(M,t) = -\frac{\omega}{\mathrm{c}^2}\underline{\vec{E}}(M,t) \qquad \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}(M,t) = \omega\underline{\vec{B}}(M,t)$$

2.3 Structure de l'OPPH

On retrouve directement la relation de dispersion :

$$\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}) = \omega\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} \quad \text{soit} \quad (\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}})\cdot\vec{k} - k^2\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\underline{\vec{E}} \quad \text{soit} \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0}\,.,$$

d'où $\omega = k\mathrm{c}$.

Les champs varient sinusoïdalement dans le temps et dans l'espace, les pulsations temporelle ω et spatiale k étant liées par la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{\mathrm{c}}.$$

La relation de structure de l'onde est

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}(M,t)}{\omega} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}(M,t)}{\mathrm{c}}$$

où $\vec{k} = k\vec{u}$. On en déduit les propriétés suivantes :

- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont transverses : $\vec{k}\cdot\vec{E}(M,t) = 0$ et $\vec{k}\cdot\vec{B}(M,t) = 0$.
- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont en phase.
- Les modules des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ vérifient :

$$\|\vec{B}(M,t)\| = \frac{\|\vec{E}(M,t)\|}{\mathrm{c}}.$$

- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont perpendiculaires entre eux, et le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ est direct.

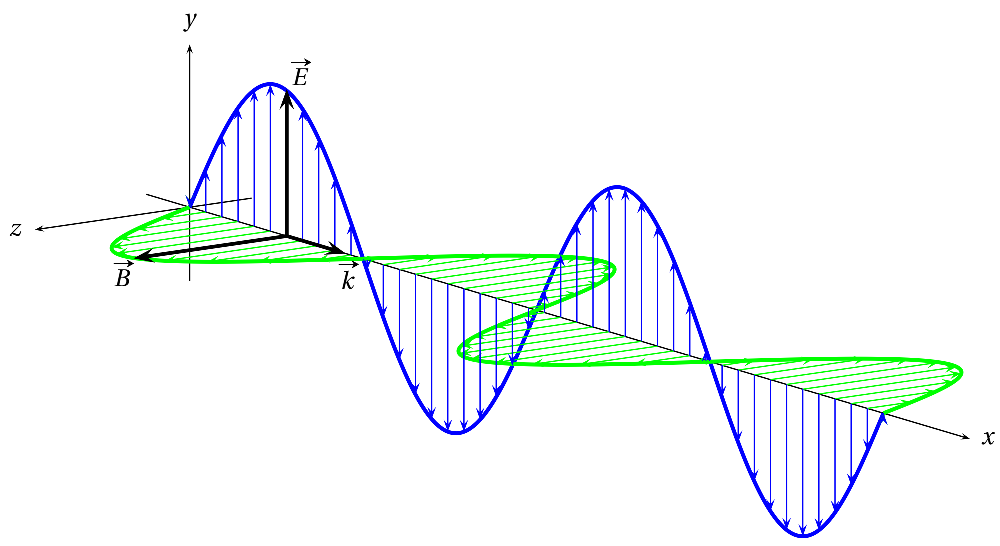


FIGURE 1 – Onde plane progressive harmonique.

3 — Aspects énergétiques d'une OPPH dans le vide

3.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH s'écrit

$$w_{\mathrm{em}}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(M,t)\,.$$

D'après la relation de structure d'une OPPH, on a

$$\frac{\vec{B}^2(M,t)}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2(M,t)}{\mu_0 \mathrm{c}^2} = \varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t)\,.$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique associée à une OPPH s'écrit

$$w_{\mathrm{em}}(M,t) = \varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t) = \frac{\vec{B}^2(M,t)}{\mu_0}$$

- Il y a équi-répartition de l'énergie sous les formes électrique et magnétique.
- En moyenne temporelle : $\langle w_{\mathrm{em}}(M)\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0}$ où E_0 et B_0 sont les amplitudes des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

3.2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting associé à une OPPH se propageant selon $\vec{u}$ s'écrit

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{\vec{E}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{E})}{\mu_0 \mathrm{c}} = \frac{\vec{E}^2(M,t)\cdot\vec{u} - [\vec{u}\cdot\vec{E}(M,t)]\vec{E}(M,t)}{\mu_0 \mathrm{c}}\,.$$

L'onde étant transverse $\vec{u}\cdot\vec{E}(M,t) = 0$.

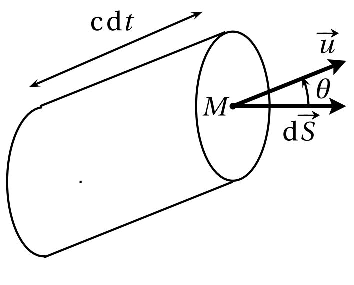
Le vecteur de Poynting associé à une OPPH se propageant selon $\vec{u}$ s'écrit

$$\vec{\Pi}(M,t) = \mathrm{c}\varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t)\vec{u} = \mathrm{c}\,w_{\mathrm{em}}(M,t)\vec{u}$$

La direction du vecteur de Poynting s'identifie à la direction de propagation de l'onde.

L'énergie traversant la surface $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ vaut

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t = c\,w_{\mathrm{em}}\,\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t\,.$$



Le volume du cylindre représenté ci-contre est

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{c}\,\mathrm{d}t\,\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

On a donc

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = w_{\mathrm{em}}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

L'énergie traversant la surface $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ est donc contenue dans le cylindre de longueur $\mathrm{c}\,\mathrm{d}t$. C'est compatible avec une propagation de l'énergie à la célérité c.

L'énergie se propage dans le sens de propagation de l'onde, à la vitesse c, égale à la célérité de l'onde.

3.3 Ordres de grandeur

Les laser hélium-néon usuels ont une puissance de l'ordre de $P = 1$ mW. En considérant un diamètre $D \approx 1$ mm, on obtient

$$\langle \Pi \rangle = \frac{P}{\pi D^2/4} \approx 10^3\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$$

En notant E_0 l'amplitude du champ électrique, on a $\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{c} E_0^2$, d'où $E_0 = \sqrt{\dfrac{2\langle \Pi \rangle}{\varepsilon_0 \mathrm{c}}} \approx 10^3\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

- Le champ électrique correspondant au rayonnement solaire reçu à la surface de la Terre est du même ordre de grandeur.
- Le flux surfacique moyenne émis à proximité d'un téléphone portable est inférieur à 1 $\mathrm{mW \cdot m^{-2}}$, d'où $E \approx 1\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

3.4 Interprétation corpusculaire

Une OPPH de pulsation ω transporte de l'énergie sous forme de quanta, appelés photons, d'énergie $W = \hbar\omega = h\nu$, se propageant à la vitesse c.
En notant n la densité volumique de photons, le nombre traversant $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}N = n\mathrm{c}\,\mathrm{d}t\,\vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.
L'énergie correspondante est $\mathrm{d}W = h\nu\,\mathrm{d}N = h\nu n \mathrm{c}\,\mathrm{d}t\,\vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$.
L'énergie contenue dans le volume $\mathrm{d}\tau$ peut s'écrire $\mathrm{d}W = \langle w_{\mathrm{em}} \rangle\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\,\mathrm{d}\tau = nh\nu\,\mathrm{d}\tau$, d'où $n = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2h\nu}$.
On a donc

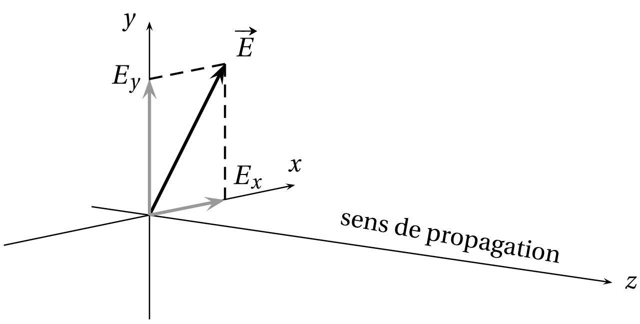
$$\langle \Pi \rangle = n\mathrm{c}h\nu \vec{u} \quad \text{et} \quad \langle w_{\mathrm{em}} \rangle = nh\nu\,.$$

On retrouve la relation $\vec{\Pi} = w_{\mathrm{em}} \mathrm{c} \vec{u}$.

4 — État de polarisation d'une OPPH

La direction du champ électrique d'une onde plane progressive harmonique dans le plan d'onde définit la direction de polarisation de cette onde.
L'évolution de cette direction au cours du temps en un point donné définit l'état de polarisation de l'onde.

- Pour décrire l'état de polarisation, on regarde la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ **en regardant l'onde arriver vers nous**.
- Le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ étant direct, il suffit de connaître la direction du champ $\vec{E}$ pour déterminer entièrement l'onde électromagnétique.

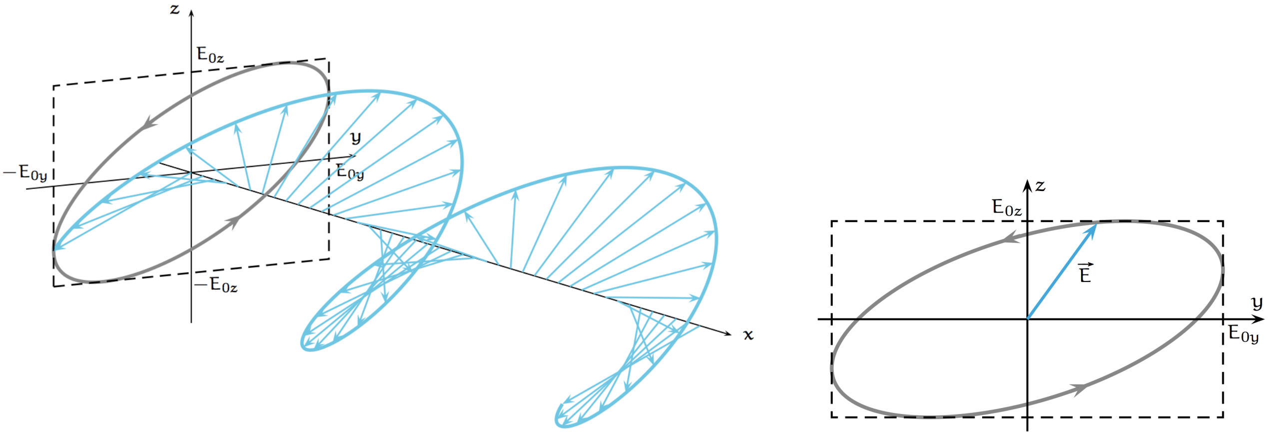


Le champ électrique a pour expression

$$\vec{E}(M,t) = \begin{pmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dans le cas le plus général, une onde plane progressive monochromatique est polarisée elliptiquement : l'extrémité du champ électrique décrit une ellipse.

  Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique, la polarisation de l'onde est dite elliptique gauche (cf. figure). Dans le cas contraire, elle est dite elliptique droite.

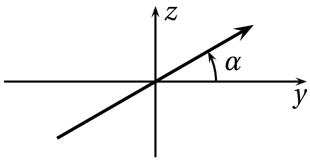


Onde polarisée elliptique gauche

Cas de la polarisation rectiligne

> Une onde est dite polarisée rectilignement si le champ $\vec{E}(M,t)$ garde une direction constante au cours du temps.

➤ Les deux composantes du champ $\vec{E}$ dans le plan de polarisation sont en phase ou en opposition de phase : $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.



$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y + E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z \quad (\varphi = 0)\,?.$$

➤ Dans le cas d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants, polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$, on a

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z\,.$$

On retrouve le vecteur de Poynting de cette onde

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)}{\mu_0 c}\,\vec{e}_x = \varepsilon_0 E_0^2(M,t)\,c\,\vec{e}_x = u_{em}\,c\,\vec{e}_x\,.$$