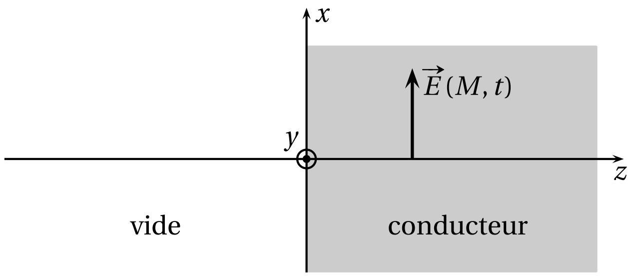
Physique des ondes — Ondes électromagnétiques planes dans les milieux conducteurs

1 — Cas d'un conducteur ohmique de conductivité réelle

1.1 Équation de diffusion vérifiée par les champs

Un conducteur ohmique de conductivité réelle γ occupe le demi-espace $z > 0$. Le système est invariant par translation selon Ox et Oy.



Considérons une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des z croissants, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$:

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)}\, \vec{u}_x\,.$$

➤ On prend *a priori* un nombre d'onde $\underline{k}$ complexe : un conducteur ohmique recevant de l'énergie de la part d'une onde électromagnétique (la puissance volumique cédée par le champ au conducteur est $\vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma \vec{E}^2$), on peut s'attendre à une atténuation de l'onde lors de sa propagation dans le milieu. On a vu que l'atténuation d'une onde plane est prise en compte par la partie imaginaire de $\underline{k}$.

Le champ électrique n'a de composante que selon $\vec{u}_x$, et cette composante ne dépend par de x (elle ne dépend que de la variable d'espace z par hypothèse). On a donc $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0$.

La relation de Maxwell-Gauss s'écrit alors $\operatorname{div}\vec{E} = 0 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, d'où $\rho(M,t) = 0$: **le conducteur est localement neutre à tout instant.**

On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0\,; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0\,; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{avec} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}\,.$$

On a alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

Dans un conducteur ohmique, le champ électrique vérifie l'équation

$$\Delta\vec{E} = \gamma\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

Il s'agit de l'équation de la diffusion.

➤ Avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on obtient immédiatement $\Delta\vec{j} = \gamma\mu_0 \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}$.

➤ On montre de même que le champ magnétique vérifie la même équation : $\Delta\vec{B} = \gamma_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

1.2 Effet de peau

Écrivons que le champ $\vec{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}(z,t)\,\vec{u}_z = \underline{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}\,\vec{u}_x$ proposé vérifie l'équation de la diffusion. On a

$$\Delta\vec{\underline{E}} = \Delta\underline{E}(z,t)\,\vec{u}_x = \frac{\partial^2 \underline{E}(z,t)}{\partial z^2}\,\vec{u}_x = -\underline{k}^2\,\vec{\underline{E}}(z,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{\underline{E}}(z,t)}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\,\vec{\underline{E}}(z,t)\,.$$

La relation de la diffusion s'écrit alors

$$-\underline{k}^2\,\vec{\underline{E}}(z,t) = \mathrm{i}\omega\gamma\mu_0\,\vec{\underline{E}}(z,t)$$

d'où

$$\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\omega\gamma\mu_0\,.$$

On remarque que l'on peut écrire $-\mathrm{i} = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, soit $\underline{k}^2 = \omega\gamma\mu_0\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
On a donc

$$\underline{k} = \pm\sqrt{\omega\gamma\mu_0}\left[\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{1/2} = \pm\sqrt{\omega\gamma\mu_0}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{\omega\gamma\mu_0}\,\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,.$$

Le nombre d'onde peut alors s'écrire

$$\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}\,.$$

➤ La constante δ a la dimension d'une longueur.

Le champ électrique s'écrit alors sous la forme

$$\underline{E}(z,t) = \underline{E}_0\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t \pm \frac{1-\mathrm{i}}{\delta}z\right)\right]\vec{u}_x = \underline{E}_0\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t \pm \frac{z}{\delta}\right)\right] \times \exp\left(\pm\frac{z}{\delta}\right)\,.$$

L'onde se propage dans le demi-espace $z \geqslant 0$. On peut donc considérer $z \to +\infty$. On garde donc le signe « $-$ » dans l'alternative « $\pm$ », l'autre signe entraînant une divergence du champ. Finalement, on obtient

$$\vec{\underline{E}}(z,t) = \underline{E_0}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]\vec{u}_x\,.$$

On en déduit $\exp\left(\mathrm{i}\left(\omega t \pm \frac{1-\mathrm{i}}{\delta}z\right)\right) = \exp\left(\mathrm{i}\left(\omega t \pm \frac{z}{\delta}\right)\right) \times \exp\left(\pm\frac{z}{\delta}\right)$.
Nous conservons la solution qui n'entraîne pas de divergence pour $z \to +\infty$, soit

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left([\mathrm{i}\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]\vec{u}_x\,.$$

Nous allons considérer $\underline{E}_0 = E_0$ réel pour simplifier. Le champ électrique s'obtient en prenant la partie réelle du champ, soit

$$\vec{E}(z,t) = E_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x\,.$$

Lorsqu'une OPPH électromagnétique arrive sur un milieu conducteur ohmique sous incidence normale, on observe une onde électromagnétique harmonique atténuée dans le conducteur :

$$\vec{E}(z,t) = \underbrace{E_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)}_{\substack{\text{amplitude}\\ \text{atténuée}}}\underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}_{\substack{\text{onde}\\ \text{progressive}}}\vec{u}_x\,.$$

L'atténuation se fait sur une distance caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ d'autant plus courte que la pulsation ω est élevée ; le champ électromagnétique ne prend alors de valeur notable que sur faible épaisseur δ au voisinage de la surface du conducteur : c'est l'**effet de peau**.

➤ L'effet de peau est caractéristique de l'équation de la diffusion en régime harmonique. Nous l'avons rencontré avec les ondes thermiques

La conductivité du cuivre est $\gamma \approx 6 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$.

- $\boxed{\text{On a } \delta \approx 1 \text{ cm à 50 Hz.}}$
- On a $\delta = 65\ \mu\mathrm{m}$ à 1 MHz.
- On a $\delta \approx 1$ mm pour $f \approx 4$ kHz.

> On retiendra qu'en électronique, l'effet de peau commence à se manifester concrètement pour des fréquences de l'ordre de 5 kHz.

La résistance d'un conducteur de section S et de longueur ℓ, parcouru par un courant uniformément réparti est $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$.
En présence de l'effet de peau, les courants se répartissent au voisinage de la surface du conducteur (sur une épaisseur de l'ordre de δ) ; la section de conducteur effectivement traversée par les courants est $S' < S$, ce qui se traduit par une résistance $R' = \dfrac{\ell}{\gamma S'} > R$: la résistance augmente avec la fréquence.

- Pour contrer ce phénomène, on utilise le « fil de Litz » : il est constitué de brins électriquement isolés les uns des autres, chacun ayant un diamètre beaucoup plus faible que le câble global.

1.3 Modèle du conducteur parfait

Le conducteur parfait correspond au cas limite $\gamma \to \infty$. L'épaisseur de peau tend alors vers zéro : $\delta \to 0$. On en déduit que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, ainsi que la densité volumique de courant $\vec{\jmath}$, tendent vers zéro dans le métal.

> Le modèle du conducteur parfait correspond à une épaisseur de peau nulle en présence d'un champ électromagnétique variable.
> On en déduit $\vec{E}(M,t) = \vec{0}$, $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$ et $\vec{\jmath}(M,t) = \vec{0}$ dans le conducteur parfait.
> Les charges ne peuvent être que surfaciques et les courants ne peuvent être que surfaciques.

2 — Ondes électromagnétiques dans les plasmas

Le plasma, souvent appelé « quatrième état de la matière », est un gaz partiellement ou totalement ionisé, constitué de cations et d'électrons. Cet état, peu fréquent naturellement sur terre, constitue la majorité de la matière stellaire et interstellaire. Plus près de nous, la magnétosphère et l'ionosphère sont constituées de plasma.
Un plasma se forme dans des conditions de température très élevée (de plusieurs centaines à plusieurs milliers de kelvins), que l'on ne rencontre pas sur terre. Nous pouvons cependant créer industriellement des plasmas, que l'on trouve dans des tubes à décharges, dans des téléviseurs et en laboratoire (tokamaks, réacteurs à plasma, propulseurs).
Du fait du couplage entre le champ électromagnétique et les mouvements collectifs des charges libres, la propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma présente des caractères particuliers par rapport à la propagation dans les autres milieux.

2.1 Modélisation adoptée

On considère un plasma dilué, constitué :

— de cations de masse M, de charge $+\mathrm{e}$ à la densité volumique n_c ;

— d'électrons de masse m, de charge $-\mathrm{e}$ à la densité volumique n_e.

On fait les hypothèses suivantes :

— on néglige les interactions entres les particules (plasma peu dense) ; elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;

— comme $M \gg m$, les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles ; c'est le modèle du « plasma froid » où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme « froids » ;

— en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique n_0 ;

— le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique **transverse** :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)},$$

avec $\underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{u}_z = 0$ pour une onde transverse se propageant selon $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}_z$.

2.2 Neutralité locale du plasma

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$.
Or, pour une onde transverse $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\underline{k}\vec{u}_z \cdot \underline{\vec{E}} = 0$. On a donc $\boxed{\rho(M,t) = 0}$.

> En présence d'une onde électromagnétique transversale, le plasma reste localement neutre. Les ions et les électrons ont la même densité volumique n_0 qu'en l'absence d'onde.

2.3 Conductivité complexe du plasma

Un électron de vitesse $\vec{v}_\mathrm{e}$ est soumis à la force de Lorentz $\underline{\vec{F}} = -\mathrm{e}\left(\underline{\vec{E}}(M,t) + \vec{v}_\mathrm{e} \wedge \underline{\vec{B}}\right)$.

- Les élections étant supposés non relativistes ($v_\mathrm{e} \ll \mathrm{c}$), la force magnétique est négligeable devant la force électrique[1] : $\underline{\vec{F}} = -\mathrm{e}\underline{\vec{E}}(M,t)$.
- Le déplacement des électrons, qui ont un mouvement d'oscillations sous l'effet du champ électrique sinusoïdal, a une amplitude faible devant la longueur d'onde λ du champ. La longueur d'onde représentant la dimension caractéristique des variations spatiales du champ, on peut considérer le champ uniforme sur la dimension caractéristique de la trajectoire des électrons, ce qui revient à considérér $kz \approx$ cte. On note alors le champ $\underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}'}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, en incluant le terme « constant » kz dans la phase de l'amplitude complexe $\underline{\vec{E}'}_0 = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$ du champ.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e}\vec{E}(t)$$

soit en notation complexe

$$\mathrm{i}\omega m\underline{\vec{v}} = -\mathrm{e}\underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

On a donc

$$\underline{\vec{v}} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}}{m\omega}\underline{\vec{E}}.$$

La densité volumique de charge électronique étant $\rho_\mathrm{e} = -\mathrm{e}n_0$, le vecteur densité volumique de courant est donné par $\underline{\vec{j}} = \rho_\mathrm{e}\underline{\vec{v}} = -\mathrm{e}n_0\underline{\vec{v}}$, soit

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = -\mathrm{i}\frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}}.$$

Le vecteur densité de courant électrique étant proportionnel au champ électrique, on peut définir une conductivité électrique complexe $\underline{\gamma}$ par analogie avec la loi d'Ohm locale : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, soit

> $$\underline{\gamma} = -\mathrm{i}\frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega}.$$

La conductivité électrique étant imaginaire pure, les champs $\vec{E}$ et $\vec{j}$ sont en quadrature.
En effet, avec $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - \varphi)$, on a

$$\underline{\vec{j}} = \frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{soit} \quad \vec{j} = \frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega}\vec{E}_0\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega}\vec{E}_0\sin\left(\omega t - \varphi\right).$$

La puissance volumique cédée à la matière par le champ s'écrit

$$p(t) = \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega}E_0^2\cos(\omega t - \varphi)\sin(\omega t - \varphi).$$

On a donc en valeur moyenne $\langle p\rangle = 0$.

1. Pour une onde électromagnétique, on a en ordre de grandeur $B \approx \dfrac{E}{\mathrm{c}}$. On a donc $\|\vec{v}_e \wedge \vec{B}\| \approx \dfrac{v_\mathrm{e}E}{\mathrm{c}} \ll E$ pour $v_\mathrm{e} \ll \mathrm{c}$.

La conductivité électrique d'un plasma dilué est représentée en notation complexe par un imaginaire pur :

$$\underline{\gamma} = -\mathrm{i}\frac{n_0 \mathrm{e}^2}{m\omega}.$$

- ➤ Le vecteur densité de courant et le champ électrique sont en quadrature (déphasage de $\pi/2$).
- ➤ La puissance moyenne cédée par l'onde au plasma est nulle : $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$.

2.4 Relation de dispersion dans le plasma

La relation de Maxwell-Faraday s'écrit, en notation complexe, $-\mathrm{i}\underline{k}\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{E}} = -\mathrm{i}\omega\vec{\underline{B}}$, soit :

$$\underline{k}\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{E}} = \omega\vec{\underline{B}}. \tag{1}$$

La relation de Maxwell-Ampère s'écrit $-\mathrm{i}\underline{k}\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{B}} = \mu_0 \vec{\underline{j}} + \mu_0\varepsilon_0 \mathrm{i}\omega\vec{\underline{E}}$, soit, compte tenu de l'expression de $\vec{\underline{j}}$ et avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$:

$$\underline{k}\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{B}} = \left(\mu_0\frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\omega} - \frac{\omega}{c^2}\right)\vec{\underline{E}}. \tag{2}$$

Des équations (1) et (2) on déduit :

$$\left(\frac{\mu_0 n_0 \mathrm{e}^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{\underline{E}} = \underline{k}\vec{u}_z \wedge (\underline{k}\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{E}}).$$

On calcule $\underline{k}\vec{u}_z \wedge (\underline{k}\vec{u}_z \wedge \vec{\underline{E}}) = \underline{k}\vec{u}_z(\underline{k}\vec{u}_z \cdot \vec{\underline{E}}) - \underline{k}^2\vec{\underline{E}} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}$ car $\vec{u}_z \cdot \vec{\underline{E}} = 0$.
On a donc

$$\left(\frac{\mu_0 n_0 \mathrm{e}^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{\underline{E}} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}.$$

On en déduit la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\mu_0 n_0 \mathrm{e}^2}{m}$.
On peut définir une pulsation caractéristique $\omega_\mathrm{p}^2 = \dfrac{\mu_0 c^2 n_0 \mathrm{e}^2}{m} = \dfrac{n_0\mathrm{e}^2}{m\varepsilon_0}$, appelée **pulsation plasma**.

La relation de dispersion dans un plasma peu dense s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{n_0\mathrm{e}^2}{m\varepsilon_0}}, \quad \text{pulsation plasma.}$$

2.5 Équation de propagation dans le plasma

Nous avons établi la relation de dispersion directement, sans établir l'équation de propagation vérifiée par le champ $\vec{E}$. Il est cependant possible d'établir cette dernière.
Avec les hypothèses précédentes, le PFD appliqué à un électron s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e}\vec{E}.$$

Le vecteur densité de courant électrique étant donné par $\vec{j} = -n_0\mathrm{e}\vec{v}$, on obtient

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{n_0\mathrm{e}^2}{m}\vec{E}.$$

Prenons d'autre part le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B})}{\partial t}$$

soit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Dans le cas d'une onde transverse, on a montré que $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, d'où

$$\Delta\vec{E} = \mu_0 \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,.$$

En remplaçant $\vec{J}$ par l'expression précédemment obtenu, il vient

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 n_0 \mathrm{e}^2}{m}\vec{E} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\mu_0 \mathrm{c}^2 n_0 \mathrm{e}^2}{m}\vec{E} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{n_0\mathrm{e}^2}{\varepsilon_0 m}\vec{E}\,.$$

> Dans le plasma, le champ électrique vérifie l'équation de propagation
>
> $$\Delta\vec{E} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{c}^2}\vec{E}$$
>
> où $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{n_0\mathrm{e}^2}{m\varepsilon_0}}$ est la pulsation plasma.

➤ Cette équation de propagation est appelée équation de Klein-Gordon.

2.6 Onde évanescente dans le domaine réactif

Le domaine réactif correspond à $\omega < \omega_\mathrm{p}$.
D'après la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{c}^2}$, on alors $\underline{k}^2 < 0$: le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$\underline{k} = \mathrm{i}k'' \quad \text{avec} \quad k'' = \pm\frac{\sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 - \omega^2}}{\mathrm{c}}\,.$$

Le champ électrique complexe s'écrit alors

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \mathrm{i}k''z)} = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{k''z}\,.$$

Nous considérons une onde progressive selon z croissant. Avec $k'' > 0$, le terme $\mathrm{e}^{+k''z}$ décrit un onde amplifiée exponentiellement qui n'a pas de réalité physique ; il faut donc retenir la solution $k'' < 0$, soit $k'' = -\dfrac{\sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 - \omega^2}}{\mathrm{c}}$.
Le champ électrique peut alors s'écrire, en notant $\underline{\vec{E}}_0 = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad \delta = -\frac{1}{k''}\,.$$

➤ Le champ électrique s'écrit sous la forme d'une onde stationnaire, dont la partie spatiale s'atténue avec z : on parle d'**onde évanescente**.

> Le domaine réactif correspond à $\omega < \omega_\mathrm{p}$.
> Le champ électrique dans le plasma s'écrit sous la forme d'une onde évanescente
>
> $$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_\mathrm{p}^2 - \omega^2}}\,.$$
>
> Il n'y a plus de propagation, et l'onde s'atténue sur une distance caractéristique δ.

➤ Une onde électrique transverse ne peut se propager dans un plasma que pour $\omega > \omega_\mathrm{p}$: le plasma se comporte comme un filtre passe-haut.

➤ Une onde arrivant sur un plasma avec $\omega < \omega_\mathrm{p}$ ne peut s'y propager : elle se réfléchit à la surface de plasma qui se comporte comme un « miroir ».

Étude énergétique de l'onde évanescente

On considère l'onde polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$, avec un vecteur d'onde imaginaire pur $\underline{\vec{k}} = \mathrm{i}k''\vec{e}_z$:

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}\,\vec{u}_x\,.$$

Le champ magnétique se déduit de l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe :

$$-\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}} = -\mathrm{i}\,\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}(\mathrm{i}k'')\,\vec{e}_z\wedge E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}\,\vec{e}_x = k''E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}\,\vec{e}_y\,.$$

On a donc

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = \mathrm{i}\frac{k''}{\omega}E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}\,\vec{e}_y = \frac{k''}{\omega}E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{i}[\cos(\omega t-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\omega t-\varphi)]\,\vec{e}_y$$

Revenons aux champs réels afin de faire une étude énergétique :

$$\vec{E}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(\omega t-\varphi)\,\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = -\frac{k''}{\omega}E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\sin(\omega t-\varphi)\,\vec{u}_y = \frac{1}{\delta\omega}E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\sin(\omega t-\varphi)\,\vec{u}_y\,.$$

➤ Les champs électrique et magnétique apparaissent tous deux comme des ondes évanescentes.

Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\delta\mu_0\omega}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\cos(\omega t-\varphi)\sin(\omega t-\varphi)\,\vec{e}_z\,.$$

En moyenne temporelle, on a $\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$.

> Pour $\omega < \omega_\mathrm{p}$, on observe une onde évanescente caractérisée par une absence de propagation de l'énergie en moyenne temporelle : $\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$.
> Toute l'énergie incidente est réfléchie à l'interface du plasma vers le milieu d'où vient l'onde incidente. Aucune énergie n'est cédée au plasma en moyenne.

➤ Une onde évanescente n'est pas une onde absorbée : cette dernière transporte de l'énergie ($\langle\vec{\Pi}\rangle \neq \vec{0}$) qui est cédée au milieu de propagation.