Physique des ondes — IV — Ondes électromagnétiques dans le vide

Équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Dans une région sans charge ni courant ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\mathrm{div}\,\vec{B}(M,t) = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{E}(M,t) = 0$$

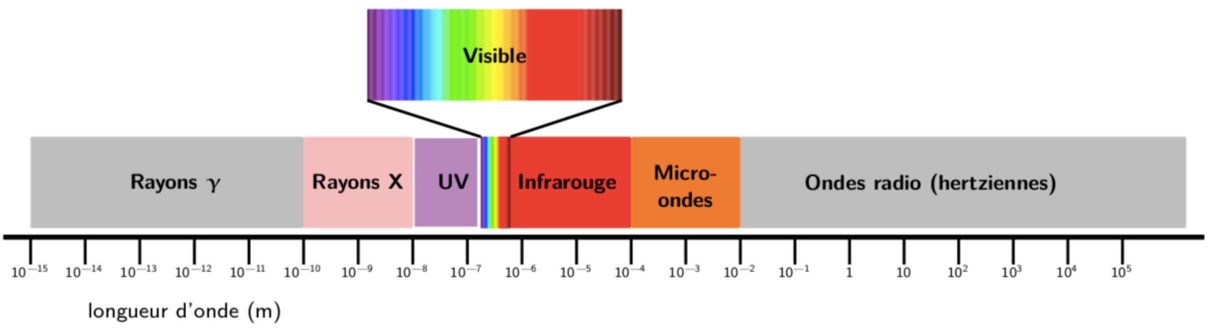
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent à la même équation de d'Alembert :

$$\Delta\vec{E}(M,t) - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2\vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta\vec{B}(M,t) - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2\vec{B}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \mathrm{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

- Les champs électrique et magnétique obéissent à deux équations de propagation découplées ; ils restent cependant couplés *via* les équations de Maxwell, et ne peuvent ainsi pas être indépendants dans une onde électromagnétique progressive.
- On a exactement $\mathrm{c} = 299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par définition du mètre.
- La perméabilité magnétique du vide vaut exactement $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$. La permittivité diélectrique du vide vaut $\varepsilon_0 \approx 8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

Domaines de fréquence des ondes électromagnétiques



type d'onde	**production**	**exemples d'utilisation**
Électrocinétique	alternateurs oscillateurs électroniques	réseau $f = 50$ Hz ($\lambda = 6000$ km) électronique BF $f < 100$ kHz ($\lambda < 3$ km)
Ondes hertziennes	antennes	radio AM $f = 1$ MHz ($\lambda \approx 300$ m) radio FM $f = 100$ MHz ($\lambda \approx 3$ m)
micro-ondes	antennes	téléphonie mobile $f \approx 1$ GHz ($\lambda \approx 30$ cm) four micro-ondes $f = 2{,}45$ GHz ($\lambda = 12{,}2$ cm) satellites $f \approx 10$ GHz ($\lambda \approx 3$ cm)
infrarouge	vibrations de la matière	$0{,}8\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 1$ mm caméra thermique, chauffage, vision nocturne
visible	transitions électroniques atomiques	$0{,}4\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 0{,}8$ mm vision humaine
ultraviolet	transitions électroniques atomiques	$0{,}28\ \mu\mathrm{m} < \lambda < 0{,}4$ mm réactions chimiques, désinfection, détecteurs optiques
rayons X	transitions électroniques (couches profondes)	10 pm $< \lambda <$ 10 nm radiographie, diffraction par les cristaux
rayons γ	réactions nucléaires	1 pm $< \lambda <$ 10 pm dangereux

Structure des ondes planes progressives harmoniques

Une onde électromagnétique est dite **plane**, **progressive** et **harmonique** (OPPH) si chaque composante des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est de la forme $\boxed{a_i(M,T) = a_{i0}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_i)}$. Le vecteur d'onde est donné par $\vec{k} = k\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde.

➤ La linéarité des équations en jeu permet d'utiliser la notation complexe $\underline{a}_i(M,t) = \underline{a}_{i0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}$. On retrouve $a_i(M,t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{a}_i(M,t)\right\}$.

Équation de Maxwell en notation complexe

On utilise les équivalences $\dfrac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \times\mathrm{i}\omega$ et $\vec{\nabla} \leftrightarrow \times(-\mathrm{i}\vec{k})$.

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}}(M,t) = 0 \qquad\qquad \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}(M,t) = 0$$

$$\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}(M,t) = -\frac{\omega}{\mathrm{c}^2}\underline{\vec{E}}(M,t) \qquad\qquad \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}(M,t) = \omega\underline{\vec{B}}(M,t)$$

➤ L'équivalence $\vec{\nabla} \leftrightarrow \times(-\mathrm{i}\vec{k})$ n'est valable **que pour une OPPH**. Dans une la cas d'une onde harmonique non plane, il faut revenir au calcul direct de la divergence ou du rotationnel.

Structure de l'OPPH

Les champs varient sinusoïdalement dans le temps et dans l'espace, les pulsations temporelle ω et spatiale k étant liées par la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{\mathrm{c}}.$$

La relation de structure de l'onde est

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}(M,t)}{\omega} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}(M,t)}{\mathrm{c}}$$

où $\vec{k} = k\vec{u}$. On en déduit les propriétés suivantes :

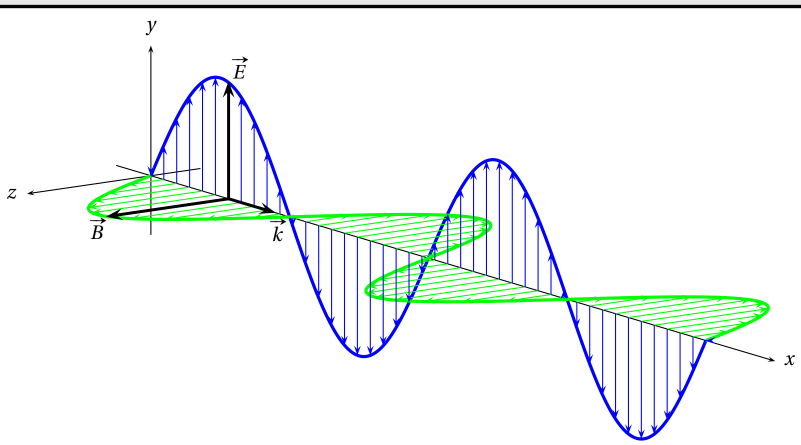
➤ Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont transverses : $\vec{k}\cdot\vec{E}(M,t) = 0$ et $\vec{k}\cdot\vec{B}(M,t) = 0$.

➤ Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont en phase.

➤ Les modules des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ vérifient :

$$\|\vec{B}(M,t)\| = \frac{\|\vec{E}(M,t)\|}{\mathrm{c}}.$$

➤ Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont perpendiculaires entre eux, et le trièdre $\left(\vec{k}, \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$ est direct.



Généralisation aux ondes planes progressives de forme quelconque

La relation de structure d'une onde plane progressive selon la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ s'écrit

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}(M,t)}{\mathrm{c}}}$$

- Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont transverses.
- Le trièdre $\left(\vec{u}, \vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$ est direct.
- On a $\|\vec{B}(M,t)\| = \dfrac{\|\vec{E}(M,t)\|}{\mathrm{c}}$.

Aspects énergétiques des OPPH

Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPH s'écrit

$$\boxed{w_{\mathrm{em}}(M,t) = \varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t) = \frac{\vec{B}^2(M,t)}{\mu_0}}$$

- Il y a équi-répartition de l'énergie sous les formes électrique et magnétique.
- En moyenne temporelle : $\langle w_{\mathrm{em}}(M)\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \dfrac{B_0^2}{2\mu_0}$ où E_0 et B_0 sont les amplitudes des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting associé à une OPPH se propageant selon $\vec{u}$ s'écrit

$$\vec{\Pi}(M,t) = \mathrm{c}\varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t)\vec{u} = \mathrm{c}\, w_{\mathrm{em}}(M,t)\vec{u}$$

La direction du vecteur de Poynting s'identifie à la direction de propagation de l'onde.

- L'énergie se propage dans le sens de propagation de l'onde, à la vitesse c, égale à la célérité de l'onde.

Ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens

Laser hélium-néon : $10^3\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$

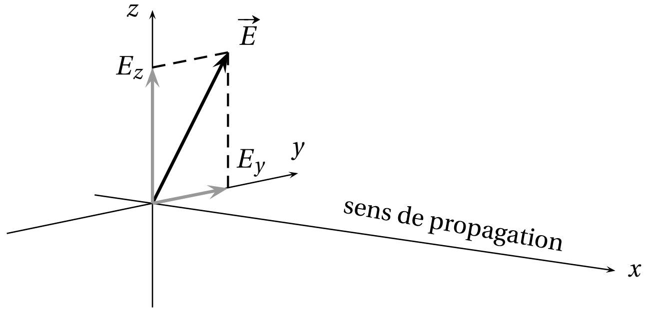
Flux solaire : $10^3\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$

Interprétation corpusculaire

Une onde électromagnétique peut être interprétée comme étant constituée de photons d'énergie $E = \mathrm{h}\nu$, où h est la constante de Planck et ν la fréquence de l'onde.
En notant n la densité volumique de photons, on a $\boxed{\langle w_{\mathrm{em}}\rangle = n\mathrm{h}\nu}$ et $\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = n\mathrm{hc}\nu\vec{u}}$.

États de polarisation des OPPH

La direction du champ électrique d'une onde plane progressive harmonique dans le plan d'onde définit la direction de polarisation de cette onde.
L'évolution de cette direction au cours du temps en un point donné définit l'état de polarisation de l'onde.



Le champ électrique a pour expression

$$\vec{E}(M,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - kx) \\ E_{0z}\cos(\omega t - kx - \varphi) \end{pmatrix}$$

où φ est le déphasage entre les deux composantes E_y et E_z du champ.

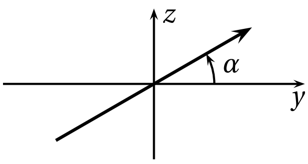
On définit l'état de polarisation à partir de la courbe décrite au cours du temps par l'extrémité du champ $\vec{E}$, le vecteur $\vec{k}$ étant dirigé vers l'observateur.

Ordres de grandeur

Polarisation rectiligne

Une onde est dite polarisée rectilignement si le champ $\vec{E}(M,t)$ garde une direction constante au cours du temps.

- Les deux composantes du champ $\vec{E}$ dans le plan de polarisation sont en phase ou en opposition de phase : $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.



$$\vec{E}(M,t) = E_0\cos\alpha\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y + E_0\sin\alpha\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z \quad (\varphi = 0)\,.$$