TD d'électromagnétisme — Ondes électromagnétiques dans des milieux conducteurs

1 — Ça va couper, je plonge !

Un sous-marinier communique par ondes radio de fréquences $f = 100\,\mathrm{kHz}$ alors que le sous-marin est à la surface. Il met fin à une discussion qui s'éternise en faisant appel à l'argument « on va plonger, ça va couper ». Son explication est-elle crédible ?

L'eau de mer est un milieu légèrement conducteur, de conductivité électrique $\gamma \approx 5\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$.

On considère la propagation d'une onde plane harmonique électromagnétique de pulsation ω, de la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}$ où Oz est la verticale descendante, $z = 0$ étant à la surface de l'eau.

On admet que dans l'eau, on peut écrire les équations de Maxwell, en remplaçant ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$, où ε_r est un coefficient sans dimension (permittivité diélectrique). Pour l'eau $\varepsilon_r \approx 80$.

On suppose la neutralité électrique locale réalisée, et on se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.

On rappelle la relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

1. Écrire les équations de Maxwell dans le contexte de l'étude.

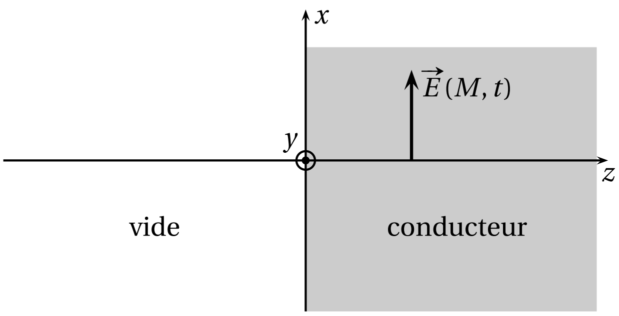
2. Établir l'équation vérifiée par $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et en déduire la relation de dispersion entre $\underline{k}$ et ω.

3. En déduire que les ondes électromagnétiques sont atténuées dans l'eau sur une distance caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de μ_0, ω et γ.

Faire l'application numérique pour $f = 100\,\mathrm{kHz}$ et conclure.

2 — Étude énergétique de l'effet de peau

Un conducteur ohmique de conductivité réelle γ occupe le demi-espace $z > 0$. Le système est invariant par translation selon Ox et Oy.



On considère la propagation dans le conducteur d'une OPPH (quasi-progressive) incidente, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$:

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}\,\vec{u}_x \quad \text{pour } z \geqslant 0.$$

1. Établir l'équation vérifiée par $\vec{E}(M,t)$ dans le conducteur.

2. En déduire la relation de dispersion entre ω et $\underline{k}$.

3. Montrer que $\underline{k} = \pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\delta}$, où l'on exprimera δ en fonction de μ_0, γ et ω.

En déduire l'expression de $\underline{E}(M,t)$ puis du champ réel $\vec{E}(M,t)$. Préciser le choix du signe dans l'expression de $\underline{k}$.

4. Déterminer le champ $\vec{B}(M,t)$ dans le conducteur.

5. Déterminer le vecteur de Poynting $\Pi(M,t)$ dans le conducteur, puis sa moyenne temporelle $\langle\Pi\rangle$. Dans quel sens se propage l'énergie ? Commenter qualitativement l'évolution de $\langle\Pi\rangle(M)$ avec z.

6. Déterminer la puissance volumique $p(M,t)$ cédée par le champ au conducteur, puis sa moyenne temporelle $\langle p\rangle$.

7. Effectuer un bilan d'énergie moyenne sur un tranche de conducteur de section S, comprise entre z est $z + \mathrm{d}z$. Interpréter le résultat.

3 — Approche énergétique de l'effet de peau

On considère un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ dans lequel règne un champ

$$\underline{E} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_x.$$

1. D'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? Quel est l'état de polarisation de l'onde ?

2. Calculer le champ $\vec{B}$ associé.

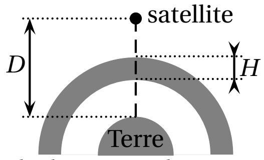
3. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

4. Effectuer alors un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$. En déduire la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5. Établir une autre expression de la puissance volumique cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6. À partir des deux expressions obtenues, déduire l'expression de la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

4 — Atmosphère et GPS



Le système de localisation GPS (*global position system*) est si précis qu'il est nécessaire de prendre en compte la dispersion due à la traversée de la ionosphère. La ionosphère, d'épaisseur H est un plasma localement neutre. Les électrons ont une masse m, une charge e et une densité n. On envisage une onde électromagnétique plane progressive harmonique.

1. Appliquer le principe fondamental aux charges et établir la relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.

2. Écrire les équations de Maxwell en complexe. Montrer que $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Exprimer ω_p.

3. Pourquoi cette pulsation ω_p est-elle appelée pulsation de coupure ? Calculer la vitesse de groupe.

4. Une onde électromagnétique est envoyée par un satellite vers la Terre. Quel est le temps τ mis pour parcourir la distance D ?

L'espace est assimilé à du vide en dehors de la ionosphère. La fréquence de l'onde est telle que $f \gg f_p$, où $f_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi}$, ce qui permet un calcul approché avec un développement limité.

5. Pour prendre en compte la dispersion ionosphérique, on envoie deux trains d'onde de fréquences f_1 et f_2 et on mesure l'écart Δt entre leurs temps de parcours. Exprimer Δt avec $f_2 > f_1 \gg f_p$.

6. Montrer que $D = c\tau - d$, avec $d = \dfrac{f_1^2 f_2^2 c\Delta t}{f^2(f_2^2 - f_1^2)}$. On trouve que d est de l'ordre de quelques mètres. Qu'en penser ?

5 — Transparence ultraviolette des métaux

On adopte le modèle de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-(m/\tau)\vec{v}$. On travaille en notation complexe. On note n^* la densité volumique d'électrons libres.

1. Montrer que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + \mathrm{i}\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n^* \mathrm{e}^2 \tau}{m}.$$

2. On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire la relation de dispersion des OPPH :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \mu_0 \underline{\sigma} \mathrm{i}\omega.$$

3. Comment se simplifie la relation de dispersion pour $\omega\tau \gg 1$? Interpréter le fait que certains métaux sont transparents dans l'ultraviolet, avec $n^* \approx 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$, $m = 9 \times 10^{-31}$ kg, $\mathrm{e} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C et $\tau \approx 10^{-14}$ s.