TD d'électromagnétisme — Ondes EM dans des milieux conducteurs — solution

1 — Ça va couper, je plonge !

1. Équations de Maxwell :

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad \text{neutralité locale} ; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} ; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath} = \mu_0\gamma\vec{E}.$$

2.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t},$$

d'où $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$.

Relation de dispersion $\boxed{\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma}$.

3. On a $\underline{k}^2 = \omega\mu_\gamma\,\mathrm{e}^{-ic\pi/2}$, d'où $\underline{k} = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\gamma}}}$.

On a une onde atténuée avec le signe « + » pris pour la racine de $\underline{k}^2$:

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = \vec{\underline{E}}_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - z/\delta)}.$$

On calcule $\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi 10^{-7}\times 2\pi 100\times 10^3\times 5}}$ soit $\boxed{\delta \approx 1\ \mathrm{m}}$.
Les ondes seront bien atténuées lorsque le sous-marin plonge.

2 — Étude énergétique de l'effet de peau

1. Se reporter au cours :

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial z} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t}}.$$

2. On remplace l'expression de $\vec{\underline{E}}$ proposée dans l'équation précédente. Après simplification on obtient

$$\boxed{\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma}.$$

3. On a

$$\underline{k}^2 = \mu_0\gamma\omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$$

d'où

$$\underline{k} = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1-\mathrm{i})$$

soit

$$\boxed{\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\delta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}}.$$

On a donc

$$\underline{E}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mp z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \mp z/\delta)}\,\vec{u}_x.$$

On choisit le signe qui ne conduit pas à une divergence de l'amplitude [1], d'où

$$\boxed{\underline{E}(M,t) = E_0\exp\mathrm{e}^{-z\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - z/\delta)}\,\vec{u}_x}.$$

Prenons la partie réelle :

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x}.$$

4. On peut déterminer le champ magnétique en écrivant Maxwell-Faraday en complexes :

$$-\mathrm{i}\,\vec{\underline{k}}\wedge\vec{\underline{E}} = -\mathrm{i}\omega\vec{\underline{B}}$$

d'où

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}}\wedge\vec{\underline{E}}}{\omega} = \frac{1-\mathrm{i}}{\delta\omega}E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - z/\delta)}\,\vec{u}_y.$$

On prend la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{E_0}{\delta\omega}\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\left[\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]\vec{u}_y}.$$

5. On forme le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$, soit

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0\delta\omega}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\left[\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]\vec{u}_z}.$$

Moyenne temporelle :

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\delta\omega}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\,\vec{u}_z}.$$

L'énergie se propage selon $\vec{u}_z$, direction de propagation de l'onde.

L'amplitude du vecteur de Poynting moyen décroît exponentiellement dans le conducteur, du fait de la dissipation d'énergie par effet Joule dans le conducteur.

6. Les courants volumiques dans le conducteur sont donnés par la loi d'Ohm locale

$$\vec{\jmath} = \gamma E_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x.$$

La puissance volumique cédée par le champ au conducteur est

$$p(M,t) = \vec{\jmath}\cdot\vec{E}$$

soit

$$\boxed{p(M,t) = \gamma E_0^2\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\boxed{\langle p\rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2z/\delta}}.$$

1. Ce signe donne une partie réelle de $\underline{k}$ positive, soit une propagation dans le sens des z croissants comme attendu.

7. Notons $\langle \overrightarrow{Pi} \rangle = \Pi_\mathrm{m}(z)\,\overrightarrow{u}_z$ le vecteur de Poynting moyen.
Considérons la tranche de section S, comprise entre z et $z+\mathrm{d}z$.
La puissance moyenne reçue vaut

$$\mathcal{P}_{\text{reçu}} = \Pi_\mathrm{m}(z,t)S - \Pi_\mathrm{m}(z+\mathrm{d}z,t)S = -\frac{\mathrm{d}\Pi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}z}S\,\mathrm{d}z.$$

Effectuer un bilan d'énergie moyenne sur un tranche de conducteur de section S, comprise entre z est $z+\mathrm{d}z$. Interpréter le résultat.

3 — Approche énergétique de l'effet de peau

On considère un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ dans lequel règne un champ

$$\underline{E} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \alpha z)}\,\overrightarrow{u}_x.$$

1. D'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? Quel est l'état de polarisation de l'onde ?

2. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ associé.

3. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

4. Effectuer alors un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$. En déduire la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5. Établir une autre expression de la puissance volumique cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6. À partir des deux expressions obtenues, déduire l'expression de la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

4 — Atmosphère et GPS

1. Un électron étant soumis à la force $\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E}$, le PFD s'écrit $m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{E}$.
En régime harmonique, on peut utiliser la notation complexe, les champs variant comme $\exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \underline{\overrightarrow{k}}\cdot\overrightarrow{r})\right)$, le PFD s'écrit

$$\mathrm{i}\omega m\,\underline{\overrightarrow{v}} = -e\,\underline{\overrightarrow{E}}.$$

Le vecteur densité de courant est relié à la vitesse des charges par $\underline{\overrightarrow{j}} = -ne\,\underline{\overrightarrow{v}}$. On en déduit son expression :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{j}} = -\mathrm{i}\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}}}.$$

2. On peut écrire les équations de Maxwell en complexe, dans le cas d'un plasma neutre ($\rho = 0$) :
Équation de Maxwell-Gauss : $-\mathrm{i}\,\underline{\overrightarrow{k}}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} = 0$, soit

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{k}}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} = 0}$$

Équation de Maxwell-Thomson : $-\mathrm{i}\,\underline{\overrightarrow{k}}\cdot\underline{\overrightarrow{B}} = 0$, soit

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{k}}\cdot\underline{\overrightarrow{B}} = 0}$$

Équation de Maxwell-Faraday : $-\mathrm{i}\,\underline{\overrightarrow{k}}\wedge\underline{\overrightarrow{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\overrightarrow{B}}$, soit

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\underline{\overrightarrow{k}}\wedge\underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}}$$

Équation de Maxwell-Ampère :

$$-\mathrm{i}\,\underline{\overrightarrow{k}}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} = \mu_0\,\underline{\overrightarrow{j}} + \mathrm{i}\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\overrightarrow{E}} = -\mathrm{i}\frac{\mu_0 ne^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}} + \mathrm{i}\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\overrightarrow{E}}$$

soit avec l'expression de $\underline{\overrightarrow{j}}$ obtenue :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{k}}\wedge\underline{\overrightarrow{B}} = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} - \frac{\omega}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\overrightarrow{E}}}$$

À partir des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, on obtient

$$\underline{\overrightarrow{k}}\wedge(\underline{\overrightarrow{k}}\wedge\underline{\overrightarrow{E}}) = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\overrightarrow{E}}$$

soit en développant le double produit vectoriel :

$$(\underline{\overrightarrow{k}}\cdot\underline{\overrightarrow{E}})\underline{\overrightarrow{k}} - \underline{k}^2\underline{\overrightarrow{E}} = \left(\frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\overrightarrow{E}}$$

Comme $\underline{\overrightarrow{k}}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} = 0$, il vient

$$\left(\underline{k}^2 + \frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0}.$$

On en déduit la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2 - \dfrac{\mu_0\mathrm{c}^2 ne^2}{m}}{c^2}$$

Elle est de la forme

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{\mathrm{c}^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}}.$$

3. Si $\omega < \omega_\mathrm{p}$, on a $\underline{k}^2 < 0$ et $\underline{k} = \mathrm{i}k''$ est imaginaire pur. Il n'y a alors pas de propagation possible ; on observe une onde évanescente. **L'onde électromagnétique ne peut se propager dans le plasma que si $\omega > \omega_\mathrm{p}$.**
La vitesse de groupe se calcule facilement en différenciant la relation de dispersion : $k\mathrm{d}k = \dfrac{\omega\mathrm{d}\omega}{\mathrm{c}^2}$, d'où :

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{k\mathrm{c}^2}{\omega} = \frac{\mathrm{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}}{\omega}$$

soit $\boxed{v_\mathrm{g} = \mathrm{c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}}$.

4. L'onde se propage dans le vide à la vitesse c et dans l'ionosphère à la vitesse v_g (on envoie un train d'onde ; il faut donc considérer la vitesse de groupe).
Elle met le temps $\tau' = \dfrac{H}{v_\mathrm{g}}$ à traverser l'ionosphère, et le temps $\tau'' = \dfrac{D-H}{c}$ à traverser le vide.

La vitesse de groupe ayant pour expression $v_g = c\sqrt{1-\dfrac{f_p^2}{f^2}}$ en fonction des fréquences, le temps total mis pour parcourir la distance D vaut :

$$\tau = \frac{H}{v_g} + \frac{D-H}{c} = \frac{H}{c}\left(1-\frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{D-H}{c}$$
$$\approx \frac{H}{c}\left(1+\frac{f_p^2}{2f^2}\right) + \frac{D-H}{c} = \frac{H}{2c}\frac{f_p^2}{f^2} + \frac{D}{c}$$

comme $f \gg f_p$. On a donc $\boxed{\tau = \dfrac{D}{c}\left(1+\dfrac{H}{2D}\dfrac{f_p^2}{f^2}\right)}$.

5. Comme $f_2 > f_1$, les temps de parcours correspondants sont tels que $\tau_1 > \tau_2$. On a :

$$\tau_1 = \frac{D}{c}\left(1+\frac{H}{2D}\frac{f_p^2}{f_1^2}\right) \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{D}{c}\left(1+\frac{H}{2D}\frac{f_p^2}{f_2^2}\right).$$

L'écart entre les temps de parcours vaut donc $\Delta t = \tau_1 - \tau_2$, soit

$$\boxed{\Delta t = \frac{Hf_p^2}{2cD}\frac{f_2^2-f_1^2}{f_1^2 f_2^2}}.$$

6. D'après l'expression de τ établie à la question 4, on a $c\tau = D + \dfrac{H}{2}\dfrac{f_p^2}{f^2}$. D'après la question 5, on peut écrire

$$\frac{Hf_p^2}{2} = D\frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2-f_1^2}c\Delta t$$

On a donc $D = c\tau - D\dfrac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2-f_1^2}c\Delta t\dfrac{f_p^2}{f^2}$, de la forme $D = c\tau - d$ avec

$$\boxed{d = \frac{f_1^2 f_2^2 c\Delta t}{f^2(f_2^2-f_1^2)}}.$$

Si l'on ne tient pas compte de la dispersion dans l'ionosphère, on trouve $D = c\tau$. Le terme d représente donc l'erreur sur la position que l'on fait en négligeant la dispersion. Son ordre de grandeur est bien supérieur à la précision voulue pour la localisation par GPS. Il faut donc tenir compte de la propagation dispersive dans l'ionosphère.

5 — Transparence ultraviolette des métaux

1. On applique le PFD à un électron :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

soit en notation complexe (régime harmonique)

$$i\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$$

d'où

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{\tau e}{m(1+i\omega\tau)}\underline{\vec{E}}$$

Le vecteur densité de courant s'écrit

$$\underline{\vec{j}} = -n^* e\underline{\vec{v}} = \frac{\frac{n^* e^2\tau}{m}}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$$

Il est proportionnel au champ électrique, ce qui permet de définir une conductivité complexe par $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$:

$$\boxed{\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\sigma_0 = \frac{n^* e^2\tau}{m}}.$$

2. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

soit en notation complexe

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \left(\mu_0\underline{\sigma} + \frac{i\omega}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$$

Le milieu étant neutre, l'équation de Maxwell-Gauss donne $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

On a donc

$$-\Delta\underline{\vec{E}} = -\left(\mu_0\underline{\sigma} + \frac{i\omega}{c^2}\right)i\omega\underline{\vec{E}} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\underline{\sigma}i\omega\right)\underline{\vec{E}}$$

Pour une OPPH de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, on a $\Delta\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$; on obtient alors la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\underline{\sigma}i\omega}$$

3. Si $\omega\tau \gg 1$, on a $\underline{\sigma} \simeq \dfrac{\sigma_0}{i\omega\tau}$. La relation de dispersion s'écrit alors

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\frac{\sigma_0 i\omega}{i\omega\tau} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\sigma_0}{\tau}$$

soit

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n^* e^2}{m}}$$

Le milieu est transparent si $k^2 > 0$ (on a alors $k'' = 0$ en notant $\underline{k} = k' + ik''$), soit pour

$$\omega^2 > \frac{\mu_0 c^2 n^* e^2}{m} = \frac{n^* e^2}{m\varepsilon_0}$$

c'est-à-dire pour

$$\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m\varepsilon_0}} = 5{,}7\cdot 10^{15}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

ce qui correspond au domaine de longueur d'onde

$$\lambda < \frac{2\pi c}{\omega_c} = 330\ \mathrm{nm}$$

qui inclut le domaine de l'ultraviolet.
Avec la valeur de τ donnée, on vérifie $\omega\tau \simeq 57 \gg 1$.